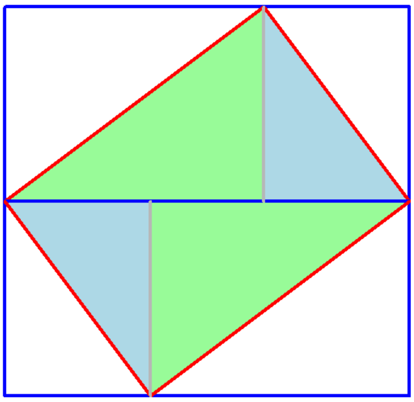
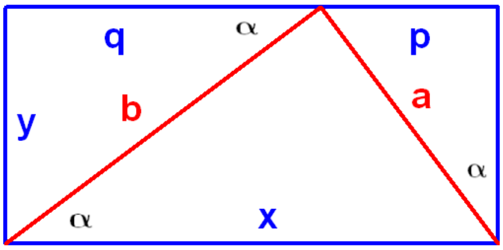
Lösung Problem des Monats Juni 2022 (Senior-Kalender)

Flächeninhalt des Rechtecks ist gleich dem Produkt der vorgegebenen Streckenlängen a und b – wie man direkt aus der folgenden Zeichnung ablesen kann:



Man kann natürlich auch kompliziert rechnen, beispielsweise wie folgt:

Durch die Strecken a und b ist das Rechteck in drei (zueinander ähnliche) rechtwinklige Dreiecke unterteilt.



Nach dem Satz von PYTHAGORAS gilt in dem durch a und b bestimmten Dreieck $x=\sqrt{a^2+b^2}$, in den anderen Dreiecken

$p^2+y^2=a^2$, $q^2+y^2=b^2$, also $y^2=b^2-q^2=a^2-p^2$.

Hieraus ergibt sich weiter $b^2-a^2=q^2-p^2=(q+p)\cdot(q+p)=x\cdot(q-p)$

und hieraus $q-p=\dfrac{b^2-a^2}{x}$. Da $q+p=x$ erhält man durch Addition der beiden Gleichungen

$$2q=(q-p)+(q+p)=\frac{b^2-a^2}{x}+x=\frac{b^2-a^2+x^2}{x}=\frac{b^2-a^2+a^2+b^2}{x}=\frac{2b^2}{x}$$, also

$$q=\frac{b^2}{x}=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ und entsprechend $$p=\frac{a^2}{x}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

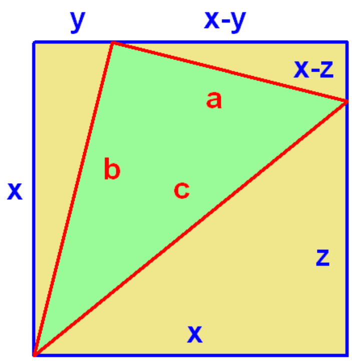
Wegen der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke gilt beispielsweise: $\dfrac{y}{q}=\dfrac{a}{b}$, also

$$y=q\cdot\frac{a}{b}=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a\cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Daher gilt für den Flächeninhalt des blau umrandeten Rechtecks:

$$A=x\cdot y=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{a\cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}}=a\cdot b.$$

Für die Lösung der zweiten Aufgabe betrachte man die folgende Grafik:



Gemäß dem Satz von PYTHAGORAS gilt:

$x^2+z^2=c^2$ und $x^2+y^2=b^2$ und $(x-y)^2+(x-z)^2=a^2$

Die gelb gefärbten Dreiecke links und oben rechts sind zueinander ähnlich. Daher gilt:

$\frac{x}{y}=\frac{x-y}{x-z}$ und $\frac{x}{y}=\frac{x-y}{x-z}$ und $\frac{x}{b}=\frac{x-y}{a}$

Beispielsweise die letzte Gleichung kann umgeformt werden:

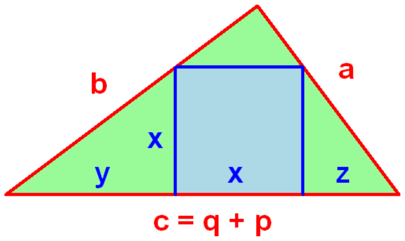
$xa=xb-yb \Leftrightarrow yb=x\cdot(b-a) \Leftrightarrow y=\frac{x\cdot(b-a)}{b}$, also ergibt sich aus $x^2+y^2=b^2$ die Beziehung

$x^2+\frac{x^2\cdot(b-a)^2}{b^2}=b^2$ und damit

$x^2b^2+x^2\cdot(b-a)^2=b^4 \Leftrightarrow x^2\cdot(b^2+(b-a)^2)=b^4 \Leftrightarrow x^2=\frac{b^4}{b^2+(b-a)^2}$.

Für a = 3 und b = 4 ergibt sich dann:

$A=x^2=\frac{256}{16+1}$ und somit x ≈ 3,88.



Ergänzt man die nebenstehende Zeichnung noch durch die Höhe h, dann ergibt sich aus den Strahlensätzen:

$\frac{x}{h}=\frac{y}{q}$ und $\frac{x}{h}=\frac{z}{p}$, also $y=\frac{x\cdot q}{h}$ und $z=\frac{x\cdot p}{h}$,

wobei mit q und p die Hypotenusenabschnitte bezeichnet sind.

Hieraus folgt: $c=x+y+z=x+x\cdot\frac{q}{h}+x\cdot\frac{p}{h}=x+x\cdot\frac{c}{h}$, also

$c\cdot h=x\cdot h+x\cdot c \Leftrightarrow c\cdot h=x\cdot(h+c) \Leftrightarrow x=\frac{c\cdot h}{h+c}$.

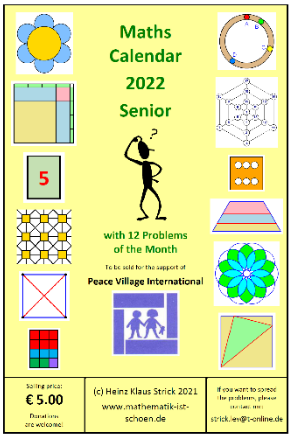
Im 3-4-5-Dreieck gilt für die Hypotenusenabschnitte und die Höhe (wegen $h^2 = p \cdot q$ und $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$):

q = 3,2 und p = 1,8 sowie h = 2,4.

Daher folgt:

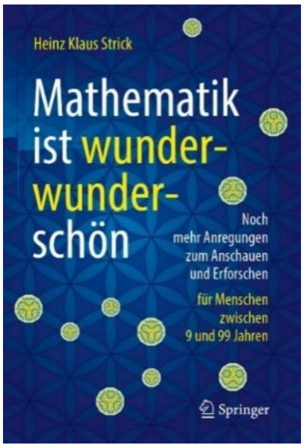
$x=\frac{5\cdot 2,4}{2,4+5}=\frac{12}{7,4}=\frac{60}{37}=1,\overline{621}$, $y=\frac{80}{37}=2,\overline{162}$, $z=\frac{45}{37}=1,\overline{216}$.

Meine Kalender für 2022 sind weiterhin lieferbar (als pdf zum Selbstausdrucken):

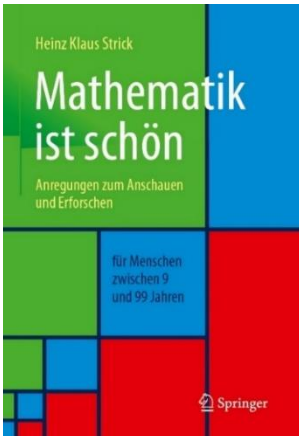


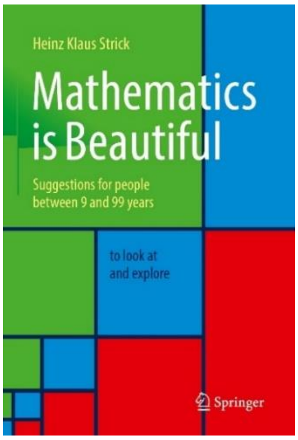
(auch in englischer Sprache erhältlich).

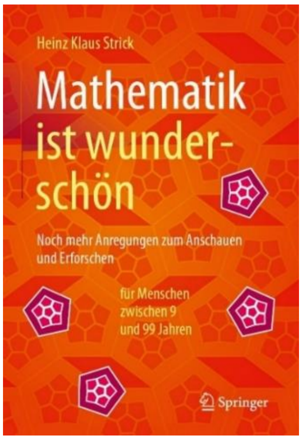
Hinweis auf meine Bücher über schöne und geniale Mathematik (mit neuen Preisen ab 1. April 2022)

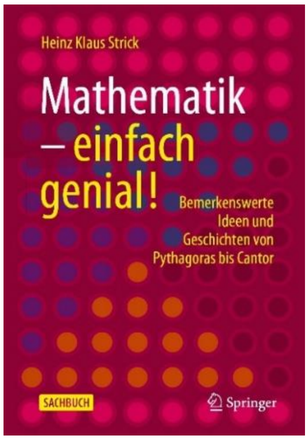


- *Mathematik ist schön* (2017, 2. Auflage 2019): 28,00 €
- *Mathematik ist wunderschön* (2018, 2. Auflage 2020): 28,00 €
- *Mathematik ist wunderwunderschön* (2019, 2. Auflage 2022): **25,00 €** **(Neuerscheinung)**
- *Mathematik – einfach genial* (2020): 33,00 €
- *Mathematics is beautiful* (2021, englisch-sprachige Ausgabe von *Mathematik ist schön*): 33,00 €









- Wenn diese Bücher über mich gekauft werden, geht jeweils 25 % des Verkaufspreises (= mein Buchhändler-Rabatt) als Spende an das **Friedensdorf Oberhausen**.
- NEU (ab 2022): Wenn Sie den Rechnungsbetrag aufrunden, dann gibt es für jeden zusätzlichen Euro ein Los bei meiner Jahreslotterie (Einzelheiten finden Sie auf der Homepage).