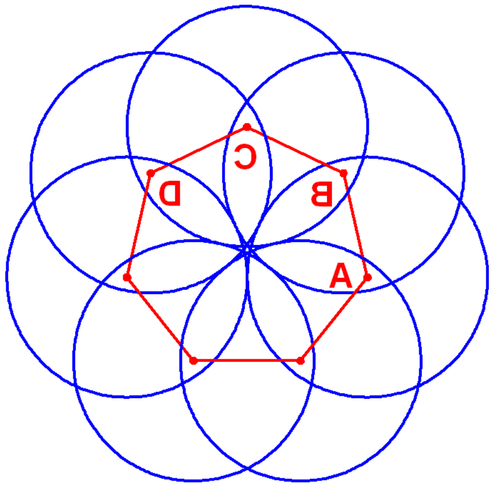
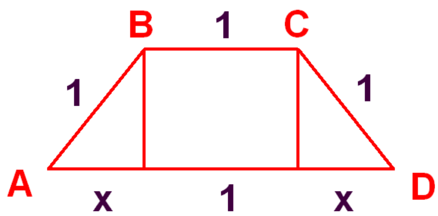
Lösung Problem des Monats April 2022 (Senior-Kalender)

Um die Eckpunkte eines regelmäßigen Vielecks mit Seitenlänge 1 werden Kreise so gezeichnet, dass eine Figur wie die folgende entsteht. Der Radius der Kreise ist so gewählt, dass ein Kreis um einen Eckpunkt und der Kreis um den jeweils überübernächsten Eckpunkt sich berühren.



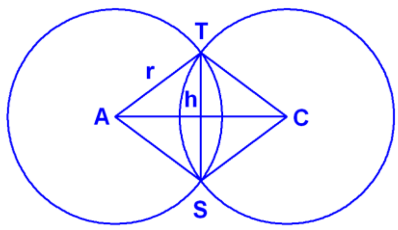
Betrachten wir dazu in der abgebildeten Figur das symmetrische Trapez mit drei gleich langen Seiten AB, BC und CD jeweils mit der Seitenlänge 1, die zum regelmäßigen Vieleck gehören. Der Berührpunkt der beiden Kreise um A und D liegt also in der Mitte der Strecke AD. Die Innenwinkel des Trapezes an den Punkten B und C sind dabei jeweils gegeben durch 180° – 360°/n.

Da die Winkelsumme in einem Viereck (also auch in einem Trapez) gleich 360° ist, sind die beiden Basiswinkel des Trapezes gleich 360°/n. Die Seite AD hat also die Seitenlänge 2x + 1, wobei x = cos(360°/n). Hieraus ergibt sich als Radius der beiden Berührkreise r = ½ + cos(360°/n).



Die blau gefärbten Teilflächen sind die Überschneidungsbereiche eines Kreises mit dem jeweils übernächsten Kreis, also beispielsweise der Kreise um A und C oder der Kreise um B und D. Als nächstes muss daher der Abstand a dieser beiden Punkte ermittelt werden. Zeichnet man die Diagonale AC ein, dann ergibt sich für das gleichschenklige Dreieck ABC mit Schenkeln der Länge 1, dass für die Basis AC gilt: |AC| = 2 · cos(180°/n).

Gesucht ist also der Flächeninhalt der Linse, die entsteht, wenn man zwei Kreise mit Radius r = ½ + cos(360°/n) und Abstand der Mittelpunkte |AC| = a = 2 · cos(180°/n) schneidet.



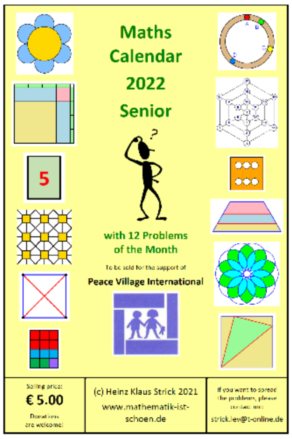
Dieser Flächeninhalt der Linse ergibt sich aus der doppelten Differenz des Flächeninhalts des Kreissektors AST mit Mittelpunkt A und des Dreiecks AST. Hierfür benötigt man den Winkel α, der mithilfe von α = arccos(a/2r) berechnet werden kann; hieraus ergibt sich dann auch die Höhe h = r · sin(α).

$$A_{Linse} = 2\cdot(A_{Sektor} - A_{Dreieck}) = 2\cdot\left(\tfrac{2\alpha}{360^\circ}\cdot\pi\cdot r^2 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{a}{2}\cdot 2h\right) = \tfrac{\alpha}{90^\circ}\cdot\pi\cdot r^2 - a\cdot h$$

Für verschiedene Werte von n kann so der Anteil der jeweils drei Linsen in einem Kreis berechnet werden.

n	Radius r	Abstand a	alpha	Höhe h	Linse	Anteil
7	1,1235	1,8019	36,684	0,671	0,4069	30,8%
8	1,2071	1,8478	40,060	0,777	0,6021	39,5%
9	1,2660	1,8794	42,079	0,848	0,7598	45,3%
10	1,3090	1,9021	43,403	0,899	0,8852	49,3%

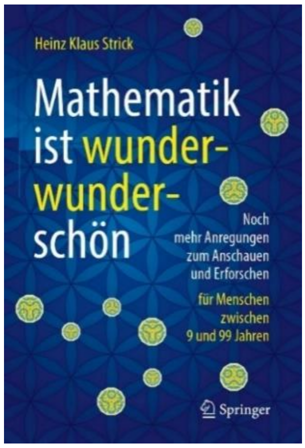
Meine Kalender für 2022 sind weiterhin lieferbar (als pdf zum Selbstausdrucken):

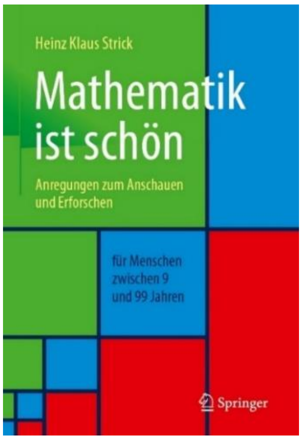


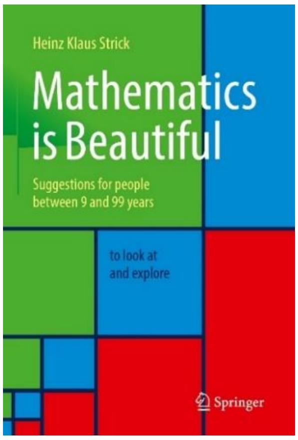
(auch in englischer Sprache erhältlich).

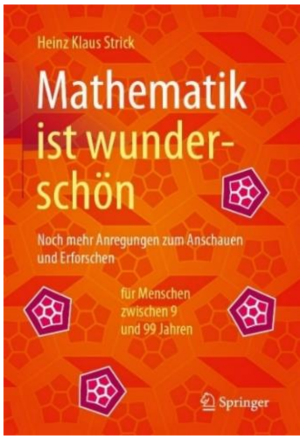
Hinweis auf meine Bücher über schöne und geniale Mathematik (mit neuen Preisen ab 1. April 2022)

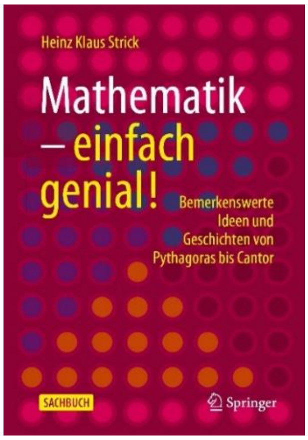
- *Mathematik ist schön* (2017, 2. Auflage 2019): 28,00 €
- *Mathematik ist wunderschön* (2018, 2. Auflage 2020): 28,00 €
- *Mathematik ist wunderwunderschön* (2019, 2. Auflage 2022): **25,00 € (Neuerscheinung)**
- *Mathematik – einfach genial* (2020): 33,00 €
- *Mathematics is beautiful* (2021, englisch-sprachige Ausgabe von *Mathematik ist schön*): 33,00 €











- ➢ Wenn diese Bücher über mich gekauft werden, geht jeweils 25 % des Verkaufspreises (= mein Buchhändler-Rabatt) als Spende an das **Friedensdorf Oberhausen**.
- ➢ NEU (ab 2022): Wenn Sie den Rechnungsbetrag aufrunden, dann gibt es für jeden zusätzlichen Euro ein Los bei meiner Jahreslotterie (Einzelheiten finden Sie auf der Homepage).