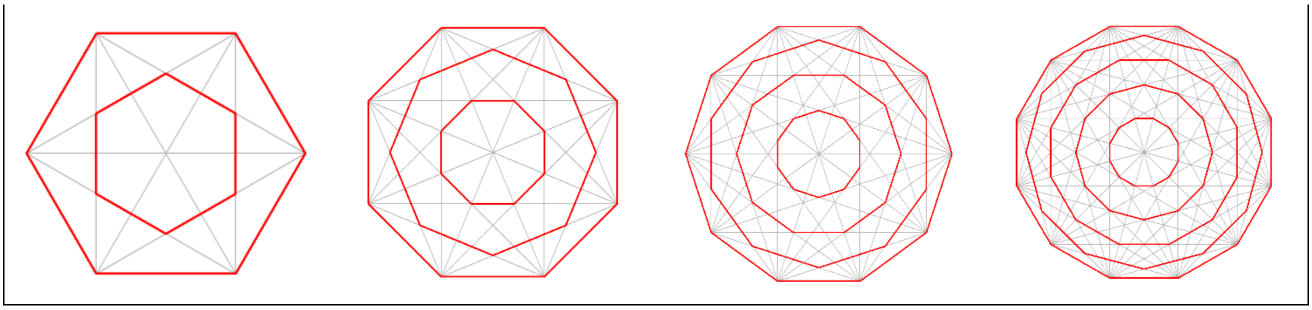
Lösung Problem des Monats Dezember 2021 (Senior-Kalender)

Leider habe ich zu spät den Tippfehler bemerkt, der in der Aufgabenstellung vorhanden war. Natürlich sind auch in der Abbildung oben rechts lauter regelmäßige 16-Ecke enthalten.

Ursprünglich hatte ich dort ein regelmäßiges 24-Eck abgebildet, dies aber – wegen der ungünstigen Auflösung – zu einem regelmäßigen 16-Eck geändert. Ich bitte um Nachsicht.



- **Wie viele solcher innen liegenden regelmäßigen Vielecke hat ein regelmäßiges *n*-Eck?**

In den Grafiken kann man ablesen, dass die Seiten der innen liegenden *n*-Ecke (n = 2, 4, 6, …) Abschnitte von Diagonalen sind. Die am weitesten außen liegenden *n*-Ecke gehören zu Diagonalen, bei denen ein Eckpunkt jeweils mit dem zweitnächsten Eckpunkt verbunden ist, die nächst-inneren dann mit dem jeweils drittnächsten usw. Die Folge der inneren *n*-Ecke endet mit der Diagonalen, die jeweils zwei einander gegenüberliegende Punkte verbindet.

Daher ist die Anzahl der *innen* liegenden regelmäßigen Vielecke gleich ½ n – 2.

- **Wie groß sind die Seitenlängen dieser Figuren? Wie groß sind die Flächeninhalte der entstehenden *n*-Eck-Ringe?**

Zwischen der Seitenlänge s des äußeren *n*-Ecks und dem Radius r des umgebenden Umkreises besteht der Zusammenhang

$$\sin(\tfrac{180^\circ}{n}) = \frac{\frac{1}{2}s}{r} \Leftrightarrow r = \frac{s}{2\sin(\frac{180^\circ}{n})}.$$

Kennt man diesen Radius, dann kann man auch jeweils den Abstand einer Diagonale vom Mittelpunkt berechnen.

Die Diagonale, die einen Eckpunkt des regelmäßigen *n*-Ecks mit dem zweitnächsten Eckpunkt verbindet, bildet zusammen mit zwei Radien als Schenkel ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Mittelpunktswinkel von 2 · 360°/n. Daher gilt für die Höhe h_1 in diesem Dreieck

$$\cos(\tfrac{360^\circ}{n}) = \frac{h_1}{r} \Leftrightarrow h_1 = r \cdot \cos(\tfrac{360^\circ}{n}), \text{ also } h_1 = s \cdot \frac{\cos(2 \cdot \frac{180^\circ}{n})}{2\sin(\frac{180^\circ}{n})}.$$

Die Seitenlänge s_1 des ersten inneren 2*n*-Ecks ergibt sich dann aus

$$\tan(\tfrac{180^\circ}{n}) = \frac{\frac{1}{2}s_1}{h_1} \Leftrightarrow s_1 = 2 \cdot h_1 \cdot \tan(\tfrac{180^\circ}{n}), \text{ also } s_1 = 2 \cdot s \cdot \frac{\cos(\frac{360^\circ}{n})}{2\sin(\frac{180^\circ}{n})} \cdot \tan(\tfrac{180^\circ}{n}) = s \cdot \frac{\cos(\frac{360^\circ}{n})}{\cos(\frac{180^\circ}{n})}.$$

Für den Flächeninhalt des betr. inneren 2*n*-Ecks ergibt sich hieraus

$$A_1 = n \cdot \tfrac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{\cos(\frac{360^\circ}{n})}{\cos(\frac{180^\circ}{n})} \cdot s \cdot \frac{\cos(\frac{360^\circ}{n})}{2\sin(\frac{180^\circ}{n})} = \tfrac{1}{2} \cdot n \cdot s^2 \cdot \frac{\cos^2(\frac{360^\circ}{n})}{2\sin(\frac{180^\circ}{n}) \cdot \cos(\frac{180^\circ}{n})} = \tfrac{1}{2} \cdot n \cdot s^2 \cdot \frac{\cos^2(\frac{360^\circ}{n})}{\sin(\frac{360^\circ}{n})}.$$

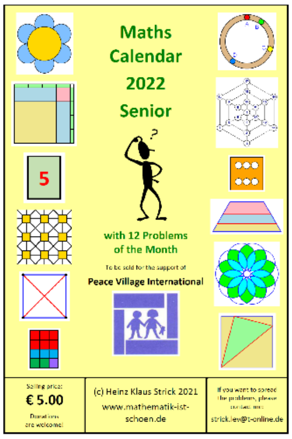
Die Diagonale, die einen Eckpunkt des regelmäßigen *n*-Ecks mit dem drittnächsten Eckpunkt verbindet, bildet zusammen mit zwei Radien als Schenkel ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Mittelpunktswinkel von 3 · 360°/n. Hier ergibt sich analog

$$h_2 = s \cdot \frac{\cos(3 \cdot \frac{180°}{n})}{2\sin(\frac{180°}{n})}, \quad s_2 = s \cdot \frac{\cos(\frac{540°}{n})}{\cos(\frac{180°}{n})}, \quad A_2 = \tfrac{1}{2} \cdot n \cdot s^2 \cdot \frac{\cos^2(\frac{540°}{n})}{\sin(\frac{360°}{n})}$$

und entsprechend weiter

$$h_3 = s \cdot \frac{\cos(4 \cdot \frac{180°}{n})}{2\sin(\frac{180°}{n})}, \quad s_3 = s \cdot \frac{\cos(\frac{720°}{n})}{\cos(\frac{180°}{n})}, \quad A_3 = \tfrac{1}{2} \cdot n \cdot s^2 \cdot \frac{\cos^2(\frac{720°}{n})}{\sin(\frac{360°}{n})} \quad \text{usw.}$$

Bestellen Sie meine Kalender für 2022 (als pdf zum Selbstausdrucken):



(auch in englischer Sprache erhältlich).

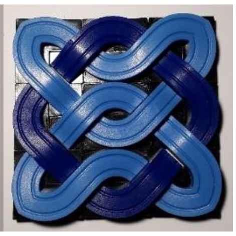
➢ **Neu:** Ab sofort können **über mich** NODUS®-Spielsteine bestellt werden – mein Händler-Rabatt geht als Spende an das Friedensdorf.

Mit den **NODUS®-Spielsteinen** können Knoten-Muster ausgelegt werden.

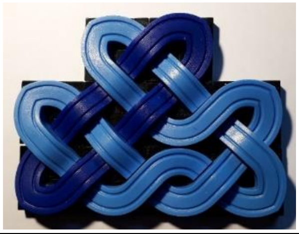
Weitere Informationen über **https://www.quecke-verlag.de/nodus/**

Solche keltischen Muster sind Thema im neuen Kapitel 13 von *Mathematik ist wunderwunderschön* (2. Auflage erscheint leider erst im Januar 2022).

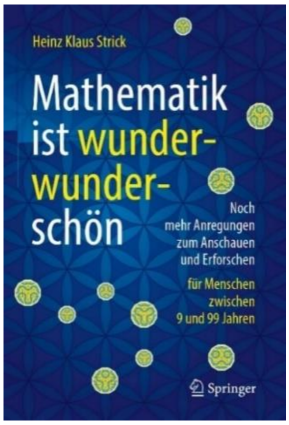
Vielleicht haben Sie diese Steine schon einmal gesehen: Die Teilnehmer des **Känguru-Wettstreits 2021** erhielten jeweils einen Beutel mit 16 *kleinen* Spielsteinen. Bei mir bestellt werden können **Geschenkkartons mit jeweils 25 großen Spielsteinen** für 24,95 € in den Farben hellblau und dunkelblau (mit Anleitung und herausfordernden Aufgaben).
Hier einige Beispiele für NODUS®-Muster:

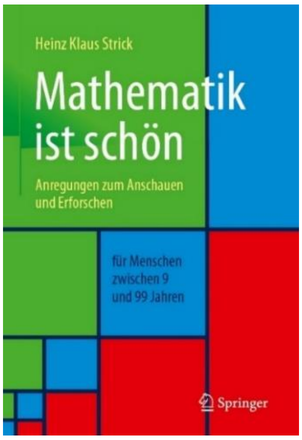


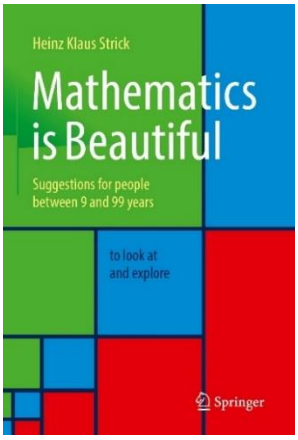


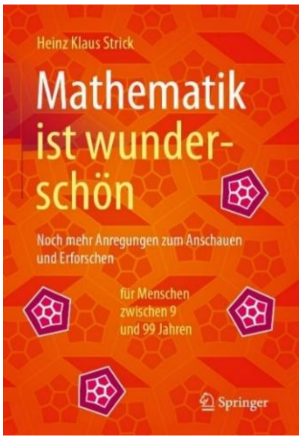

Hinweis auf meine Bücher über schöne und geniale Mathematik

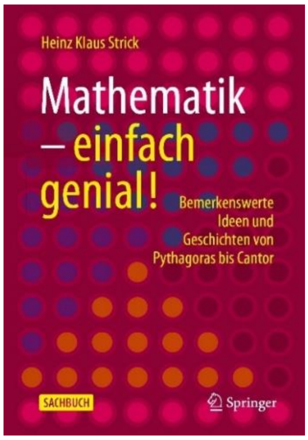


- *Mathematik ist schön* (2017, 2. Auflage 2019): 25,00 €
- *Mathematik ist wunderschön* (2018, 2. Auflage 2020): 25,00 €
- *Mathematik ist wunderwunderschön*
  (2019, die **2. Auflage erscheint leider erst im Januar 2022**): 25,00 €
- *Mathematik – einfach genial* (2020): 30,00 €
- *Mathematics is beautiful* (2021, englisch-sprachige Ausgabe von *Mathematik ist schön*): 30,00 €









- ➢ Wenn diese Bücher über mich gekauft werden, geht jeweils 25 % des Verkaufspreises (= mein Buchhändler-Rabatt) als Spende an das Friedensdorf Oberhausen.