Lösung Problem des Monats Oktober 2021 (Senior-Kalender)

Betrachten wir irgendeine Stufe, beispielsweise die 5. Stufe. Wie ist Herr A. dorthin gekommen?

Entweder war er vorher auf der 4. Stufe und hat den Einer-Schritt gewählt
oder er war vorher auf der 3. Stufe und hat den Zweier-Schritt gewählt
oder er war vorher auf der 2. Stufe und hat den Dreier-Schritt gewählt.

Bezeichnen wir die Anzahl der Schritte bis zur Stufe k mit a(k), dann gilt also:

a(0) = 0 (als Start) und dann weiter

a(5) = a(4) + a(3) + a(2), und entsprechend allgemein für n > 5: a(k) = a(k-1) + a(k-2) + a(k-3).

Dies gilt auch noch für k = 4: a(4) = a(3) + a(2) + a(1) und für k = 3: a(3) = a(2) + a(1) + a(0).

Am Anfang sieht das so aus:

Um auf die 1. Stufe zu gelangen, gibt es nur 1 Möglichkeit: a(1) = a(0) + 1 = 1.

Um auf die 2. Stufe zu gelangen, gibt es 2 Möglichkeiten: a(2) = a(1) + a(0) = 1 + 1 = 2.

Und somit ergibt sich:

a(3) = a(2) + a(1) + a(0) = 4.

a(4) = a(3) + a(2) + a(1) = 4 + 2 + 1 = 7,

a(5) = a(4) + a(3) + a(2) = 7 + 4 + 2 = 13,

a(6) = a(5) + a(4) + a(3) = 13 + 7 + 4 = 24,

a(7) = a(6) + a(5) + a(4) = 24 + 13 + 7 = 44,

a(8) = a(7) + a(6) + a(5) = 44 + 24 + 13 = 81,

a(9) = a(8) + a(7) + a(6) = 81 + 44 + 24 = 149,

a(10) = a(9) + a(8) + a(7) = 149 + 81 + 44 = 274.

Herr A. hat also 274 Möglichkeiten, die Treppe mit 10 Stufen hochzusteigen.

Im Folgenden bezeichnen wir mit P(n;k) die Wahrscheinlichkeit, dass Herr A. nach n Schritten auf Stufe k angekommen ist. Dann gilt

nach 1-maligem Würfeln:

$P(1;1) = \frac{1}{3};\ P(1;2) = \frac{1}{3};\ P(1;3) = \frac{1}{3}$,

nach 2-maligem Würfeln:

$$P(2;1) = 0;\ P(2;2) = \tfrac{1}{3} \cdot P(1;1) = \tfrac{1}{9};\ P(2;3) = \tfrac{1}{3} \cdot P(1;1) + \tfrac{1}{3} \cdot P(1;2) = \tfrac{2}{9};$$
$$P(2;4) = \tfrac{1}{3} \cdot P(1;1) + \tfrac{1}{3} \cdot P(1;2) + \tfrac{1}{3} \cdot P(1;3) = \tfrac{3}{9};$$
$$P(2;5) = \tfrac{1}{3} \cdot P(1;2) + \tfrac{1}{3} \cdot P(1;3) = \tfrac{2}{9};\ P(2;6) = \tfrac{1}{3} \cdot P(1;3) = \tfrac{1}{9}$$

nach 3-maligem Würfeln:

$$P(3;1) = P(3;2) = 0;$$
$$P(3;3) = \tfrac{1}{3} \cdot P(2;2) = \tfrac{1}{27};$$
$$P(3;4) = \tfrac{1}{3} \cdot P(2;1) + \tfrac{1}{3} \cdot P(2;2) + \tfrac{1}{3} \cdot P(2;3) = 0 + \tfrac{1}{27} + \tfrac{2}{27} = \tfrac{3}{27};$$
$$P(3;5) = \tfrac{1}{3} \cdot P(2;2) + \tfrac{1}{3} \cdot P(2;3) + \tfrac{1}{3} \cdot P(2;4) = \tfrac{1}{27} + \tfrac{2}{27} + \tfrac{3}{27} = \tfrac{6}{27};$$
$$P(3;6) = \tfrac{1}{3} \cdot P(2;3) + \tfrac{1}{3} \cdot P(2;4) + \tfrac{1}{3} \cdot P(2;5) = \tfrac{2}{27} + \tfrac{3}{27} + \tfrac{2}{27} = \tfrac{7}{27};$$
$$P(3;7) = \tfrac{1}{3} \cdot P(2;4) + \tfrac{1}{3} \cdot P(2;5) + \tfrac{1}{3} \cdot P(2;6) = \tfrac{3}{27} + \tfrac{2}{27} + \tfrac{1}{27} = \tfrac{6}{27};$$
$$P(3;8) = \tfrac{1}{3} \cdot P(2;5) + \tfrac{1}{3} \cdot P(2;6) + \tfrac{1}{3} \cdot P(2;7) = \tfrac{2}{27} + \tfrac{1}{27} + 0 = \tfrac{3}{27};$$
$$P(3;9) = \tfrac{1}{3} \cdot P(2;6) + \tfrac{1}{3} \cdot P(2;7) + \tfrac{1}{3} \cdot P(2;8) = \tfrac{1}{27} + 0 + 0 = \tfrac{1}{27}$$

Hier muss also im Prinzip die gleiche Rekursionsformel benutzt werden wie im ersten Teil der Aufgabe. Dies führt man so weiter, wobei man beachten muss, dass ab Stufe 8 die besonderen Regeln gelten, also

$$P(4;10) = \tfrac{1}{3} \cdot P(3;7) + \tfrac{2}{3} \cdot P(3;8) + \tfrac{3}{3} \cdot P(3;9)$$

und danach zusätzlich die Wahrscheinlichkeit, dass Herr A. bereits auf Stufe 10 angekommen ist

$$P(5;10) = \tfrac{1}{3} \cdot P(4;7) + \tfrac{2}{3} \cdot P(4;8) + \tfrac{3}{3} \cdot P(4;9) + P(4;10)$$

Aus der folgenden EXCEL-Tabelle können die Wahrscheinlichkeiten mit 6-stelliger Genauigkeit abgelesen werden. Die Berechnung des Mittelwerts μ (Erwartungswerts) erfolgt mithilfe der Wahrscheinlichkeitszuwächse, mit denen die 10. Stufe erreicht wird, also

$\mu = 4 \cdot P(4;10) + 5 \cdot [P(5;10) – P(4;10)] + 6 \cdot [P(6;10) – P(5;10)] + \ldots + 10 \cdot [P(10;10) – P(9;10)]$

	Stufe										
Schritte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	μ
1	0,333333	0,333333	0,333333	0	0	0	0	0	0	0	0,000000
2	0	0,111111	0,222222	0,333333	0,222222	0,111111	0	0	0	0	0,000000
3	0	0	0,037037	0,111111	0,222222	0,259259	0,222222	0,111111	0,037037	0	0,000000
4	0	0	0	0,012346	0,049383	0,123457	0,197531	0,234568	0,197531	0,185185	0,740741
5	0	0	0	0	0,004115	0,020576	0,061728	0,123457	0,185185	0,604938	2,098765
6	0	0	0	0	0	0,001372	0,00823	0,028807	0,068587	0,893004	1,728395
7	0	0	0	0	0	0	0,000457	0,003201	0,012803	0,983539	0,633745
8	0	0	0	0	0	0	0	0,000152	0,001219	0,998628	0,120713
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000051	0,999949	0,011888
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,000508
											5,334756

Im Mittel benötigt Herr A. 5,3 Schritte, um auf Stufe 10 zu gelangen.

Beispiele für die Berechnung von Erwartungswerten und Wahrscheinlichkeitsverteilungen finden Sie in meinen Büchern

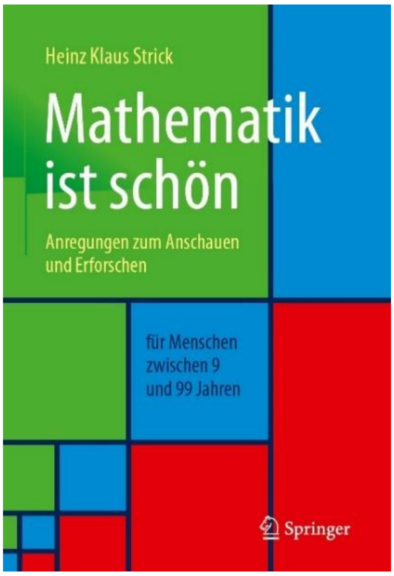
Mathematik ist schön, Kap. 12: Augensummen

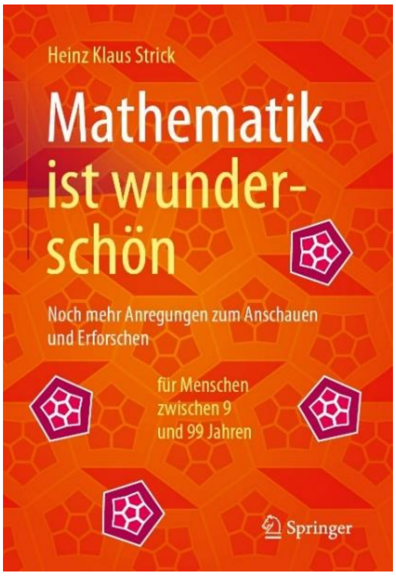
Mathematik ist wunderschön, Kap. 12: Gesetzmäßigkeiten des Zufalls

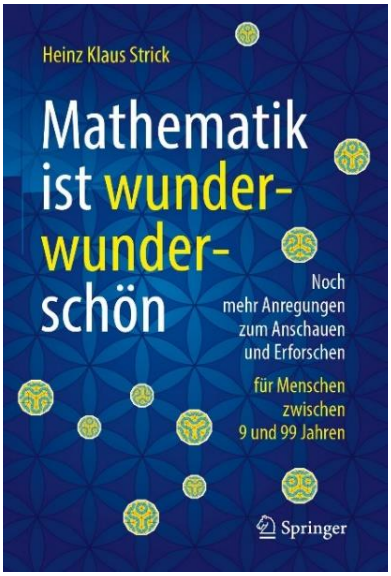
---

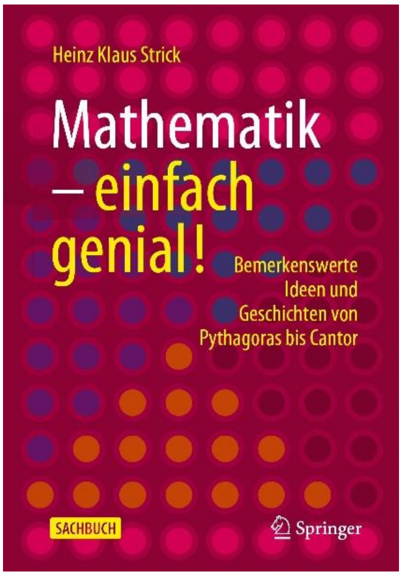
Hinweis auf meine Bücher über schöne und geniale Mathematik

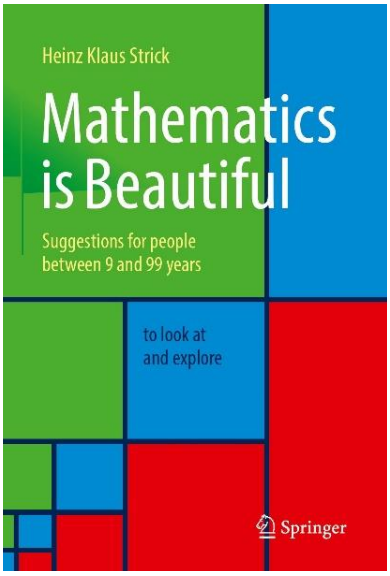
- *Mathematik ist schön* (2017, 2. Auflage 2019): 25,00 €
- *Mathematik ist wunderschön* (2018, 2. Auflage 2020): 25,00 €
- *Mathematik ist wunderwunderschön*
  (2019, die 2. Auflage erscheint im Herbst 2021): 25,00 €
- *Mathematik – einfach genial* (2020): 30,00 €
- *Mathematics is beautiful*
  (2021, englisch-sprachige Ausgabe von *Mathematik ist schön*): 30,00 €











➢ Wenn diese Bücher über mich gekauft werden, geht jeweils 25 % des Verkaufspreises (= mein Buchhändler-Rabatt) als Spende an das **Friedensdorf Oberhausen**.