Lösung Problem des Monats August 2021 (Senior-Kalender)

Aus der Ähnlichkeit der Blätter dieses Formats folgt

a_0 (= längere Seite DIN-A0) : b_0 (= kürzere Seite DIN-A0)

= a_1 (= längere Seite DIN-A1) : b_1 (= kürzere Seite DIN-A1)

= …

wobei $a_1 = b_0$, $a_2 = b_1$, … sowie $b_1 = ½\, a_0$, $b_2 = ½\, a_1$, …

ergibt sich die Beziehung

$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_0}{\frac{1}{2}a_0}$, also $\frac{1}{2}a_0^{\,2} = b_0^{\,2} \Leftrightarrow a_0^{\,2} = 2b_0^{\,2} \Leftrightarrow a_0 = \sqrt{2}\cdot b_0$

(analog für die Seitenlängen der anderen Formate).

Aus $a_0 = \sqrt{2}\cdot b_0 \wedge a_0 \cdot b_0 = 1$ ergibt sich $\sqrt{2}\cdot b_0 \cdot b_0 = 1 \Leftrightarrow b_0^{\,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow b_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ und hieraus

$a_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{4}}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$.

Ein DIN-A4-Blatt hat den Flächeninhalt $\frac{1}{16}$; daher gilt hier entsprechend $a_4 = \frac{1}{4}\cdot\sqrt[4]{2}$ und $b_4 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

Das grün gefärbte Quadrat hat die Seitenlänge $b_4 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \approx 21{,}022$ cm.

Hieraus folgt, dass die beiden blau gefärbten Quadrate die Seitenlänge

$c_4 = a_4 - b_4 \approx 8{,}707$ cm haben.

Die beiden rosa gefärbten Quadrate haben dann die Seitenlänge

$d_4 = b_4 - 2\cdot c_4 = b_4 - 2\cdot(a_4 - b_4) = 3\cdot b_4 - 2\cdot a_4 \approx 3{,}607$ cm.

Für die gelb gefärbten Quadrate gilt dann weiter

$e_4 = c_4 - 2\cdot d_4 = (a_4 - b_4) - 2\cdot(3\cdot b_4 - 2\cdot a_4) = 5\cdot a_4 - 7\cdot b_4 \approx 1{,}494$ cm.

Im nächsten Schritt erhalten wir analog

$f_4 = d_4 - 2\cdot e_4 = (3\cdot b_4 - 2\cdot a_4) - 2\cdot(5\cdot a_4 - 7\cdot b_4) = 17\cdot b_4 - 12\cdot a_4 \approx 0{,}619$ cm.

Die Koeffizienten der auftretenden Terme sind die Glieder einer Folge von Zahlen, deren Quotient betraglich gegen $\sqrt{2}$ konvergiert: $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \ldots$

Die Zähler und die Nenner lassen sich dabei rekursiv berechnen:

zweimal der letzte Zähler (bzw. Nenner) + einmal der vorletzte Zähler (bzw. Nenner).

- *Hinweis*: Rekursiv definierte Folgen dieses Typs mit Grenzwert $\sqrt{2}$ werden im Kap. 7 von *Mathematik ist wunderwunderschön* untersucht.

Für die Untersuchungen am gefalteten DIN-A4-Blatt verwenden wir folgende Bezeichnungen:

$a = a_4$, $b = b_4$, DZ = x (also ZA = a – x), AD‘ = y (also D’B = b – y), D’X = z (also XC’ = b – z) und YC’ = YC = u. Außerdem wird der Winkel AD’Z mit α bezeichnet; wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke tritt dieser auch bei X (BXD‘) und bei X (YXC‘) auf.

Das Sechseck setzt sich zusammen aus dem Trapez ABYZ und dem rechtwinkligen Dreieck XC’Y. Der Flächeninhalt des Trapezes ist $A_T = \frac{1}{2}\cdot(a-x+a-u)\cdot b = \frac{1}{2}\cdot(2a-x-u)\cdot b$, der des Dreiecks $A_D = \frac{1}{2}\cdot(b-z)\cdot u$.

Die einzelnen Größen können schrittweise berechnet werden.

Aus der Wahl von x ergibt sich nach dem Satz von Pythagoras $y = \sqrt{x^2-(a-x)^2}$, außerdem der Winkel α aus $\sin(\alpha) = \dfrac{a-x}{x}$.

Als Nächstes kann z bestimmt werden: $\sin(\alpha) = \dfrac{b-y}{z}$, also $z = \dfrac{b-y}{\sin(\alpha)}$,

schließlich u: $\tan(\alpha) = \dfrac{u}{b-z}$, also $u = (b-z)\cdot\tan(\alpha)$.

Die so erhaltenen Werte können dann in die Formeln zur Berechnung der Flächeninhalte eingesetzt werden.

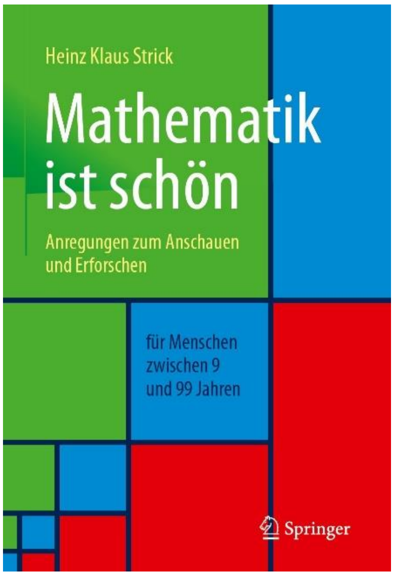
Zuvor muss aber der Definitionsbereich bestimmt werden: Die obere linke Ecke kann auf die untere linke Ecke gefaltet werden, dann ist x = ½ · a ≈ 14,865 cm, aber es entsteht kein Sechseck.

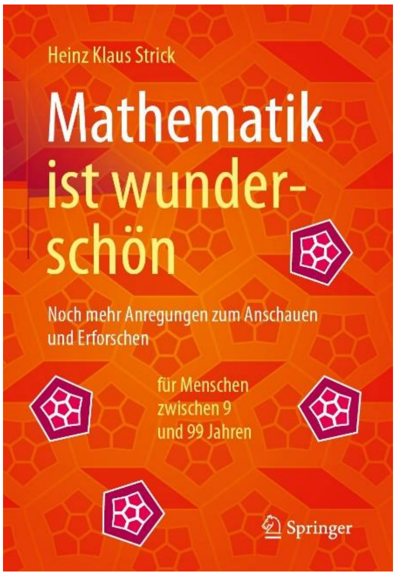
Maximal kann die obere linke Ecke auf die untere rechte Ecke fallen, dann gilt

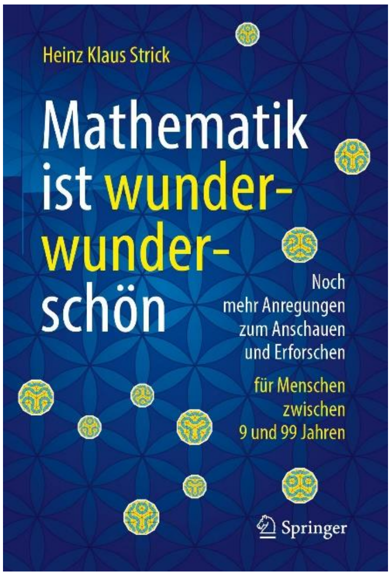
$$x^2 = (a-x)^2 + b^2 \Leftrightarrow x^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 \Leftrightarrow 2ax = a^2 + b^2 \Leftrightarrow x = \frac{a^2+b^2}{2a} \approx 22{,}30 \text{ cm}.$$

Der folgenden EXCEL-Tabelle kann man die Entwicklung des Flächeninhalts in Abhängigkeit von x für 14,865 < x ≤ 22,297 entnehmen, dabei ist der Winkel α (wie in EXCEL üblich) im Bogenmaß angegeben.

Man stellt fest, dass der Flächeninhalt zunächst streng monoton wächst bis x ≈ 17,91 cm, dann streng monoton fällt bis x ≈ 20,51 cm, dann aber wieder streng monoton wächst bis zum Rand des Definitionsbereichs bei x ≈ 22,30 cm – dies ist das absolute Maximum des Flächeninhalts des Sechsecks (das dann nur noch ein Fünfeck ist).







x	y	α	z	u	A_T	A_D	A
14,9	1,44077	1,47395	19,67383	13,88122	322,47469	9,35996	331,83465
15	2,83229	1,38084	18,52332	12,99727	330,71496	16,24066	346,95562
15,5	6,14427	1,16320	16,20578	11,15535	344,82019	26,86556	371,68575
16	8,21476	1,03163	14,92497	10,19129	349,69797	31,07040	380,76837
16,5	9,85963	0,93035	13,92164	9,52819	351,41240	33,82872	385,24112
17	11,26688	0,84630	13,02763	9,03311	351,36061	36,10889	387,46949
17,5	12,51690	0,77381	12,17042	8,64922	350,14022	38,28137	388,42159
17,90	13,43342	0,72202	11,48274	8,40113	348,54338	40,07203	388,61541
17,91	13,45554	0,72079	11,46537	8,39550	348,49751	40,11807	388,61558
17,92	13,47761	0,71956	11,44798	8,38989	348,45138	40,16417	388,61555
17,95	13,54363	0,71587	11,39576	8,37321	348,31136	40,30296	388,61432
18	13,65295	0,70979	11,30847	8,34591	348,07274	40,53583	388,60857
18,5	14,70147	0,65233	10,41279	8,10449	345,35471	42,99281	388,34751
19	15,68003	0,60013	9,45979	7,91255	342,11671	45,74487	387,86158
19,5	16,60101	0,55227	8,42775	7,76131	338,45073	48,87557	387,32630
20	17,47351	0,50809	7,29462	7,64436	334,42445	52,47009	386,89454
20,50	18,30448	0,46705	6,03647	7,55678	330,08941	56,62275	386,71216
20,51	18,32071	0,46626	6,00985	7,55530	329,99986	56,71222	386,71207
20,52	18,33693	0,46547	5,98317	7,55383	329,91019	56,80195	386,71214
20,6	18,46618	0,45918	5,76750	7,54244	329,18906	57,52960	386,71866
21	19,09932	0,42874	4,62590	7,49474	325,48592	61,44381	386,92973
21,5	19,86238	0,39282	3,03039	7,45518	320,64621	67,06684	387,71305
22	20,59719	0,35904	1,21016	7,43559	315,59652	73,65782	389,25434
22,29763	21,02241	0,33984	0,00000	7,43254	312,50000	78,12500	390,62500