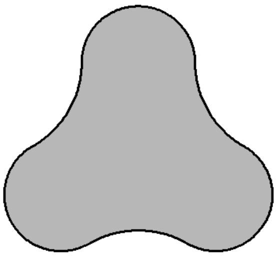
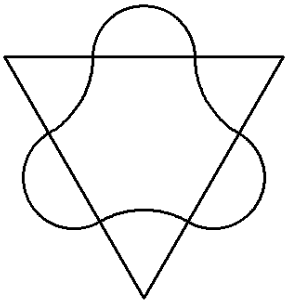
Lösung Problem des Monats September 2021 (Senior-Kalender)

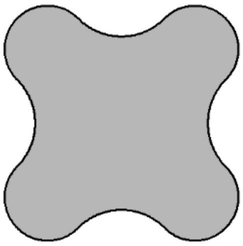
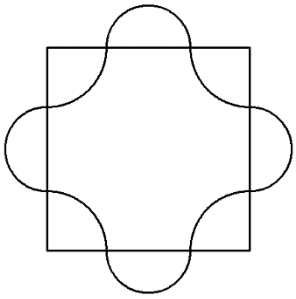
Jeder der Kreissektoren in den drei Ecken des Dreiecks mit Seitenlänge 1 soll genauso groß sein wie die Halbkreise mit Radius b, die auf die Dreiecksseiten aufgesetzt sind.

Es gilt also:

$2a + 2b = 1 \Leftrightarrow a + b = ½ \Leftrightarrow b = ½ – a$ und

$$\frac{60°}{360°}\cdot\pi\cdot a^2 = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot b^2 \Leftrightarrow a^2 = 3b^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{3}b$$

Einsetzen ergibt: $b = \frac{1}{2} - \sqrt{3}b \Leftrightarrow (1+\sqrt{3})\cdot b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2(1+\sqrt{3})} \approx 0{,}183$, also a ≈ 0,317.

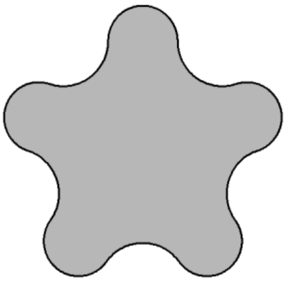
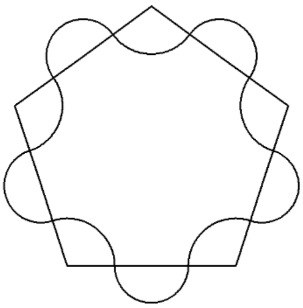
Analog ergibt sich:

$b = ½ – a$ und

$$\frac{90°}{360°}\cdot\pi\cdot a^2 = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot b^2 \Leftrightarrow a^2 = 2b^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2}b$$

$$b = \frac{1}{2} - \sqrt{2}b \Leftrightarrow (1+\sqrt{2})\cdot b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$b = \frac{1}{2(1+\sqrt{2})} \approx 0{,}207;\ also\ a \approx 0{,}293$$

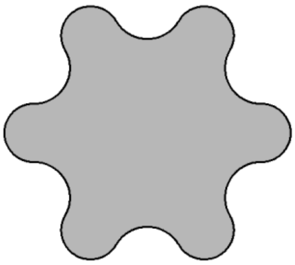
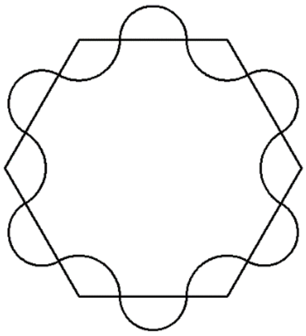



$b = ½ – a$ und

$$\frac{108°}{360°}\cdot\pi\cdot a^2 = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot b^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{5}{3}b^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{5}{3}}\cdot b$$

$$b = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{3}}\cdot b \Leftrightarrow \left(1+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\cdot b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$b = \frac{1}{2\cdot\left(1+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)} \approx 0{,}218;\ also\ a \approx 0{,}282$$

$b = ½ – a$ und

$$\frac{120°}{360°}\cdot\pi\cdot a^2 = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot b^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{3}{2}b^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot b$$

$$b = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot b \Leftrightarrow \left(1+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\cdot b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$b = \frac{1}{2\cdot\left(1+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)} \approx 0{,}225;\ also\ a \approx 0{,}275$$

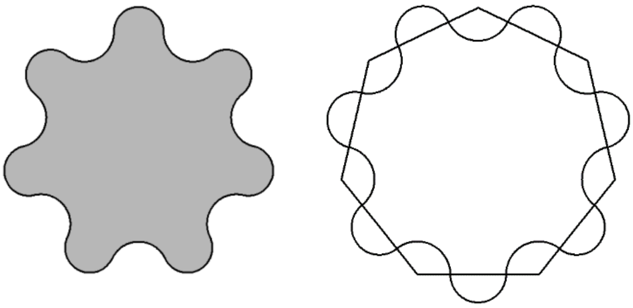
Allgemein ergibt sich: Für die Winkel im regelmäßigen n-Eck gilt: $\alpha = 180° - \frac{360°}{n}$; daher ist der Anteil am Vollwinkel gleich $\frac{\alpha}{360°} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$.

Hier gilt daher:

b = ½ – a und $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) \cdot \pi \cdot a^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot b^2 \Leftrightarrow \frac{n-2}{2n} \cdot \pi \cdot a^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot b^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{n}{n-2}} \cdot b$

und weiter:

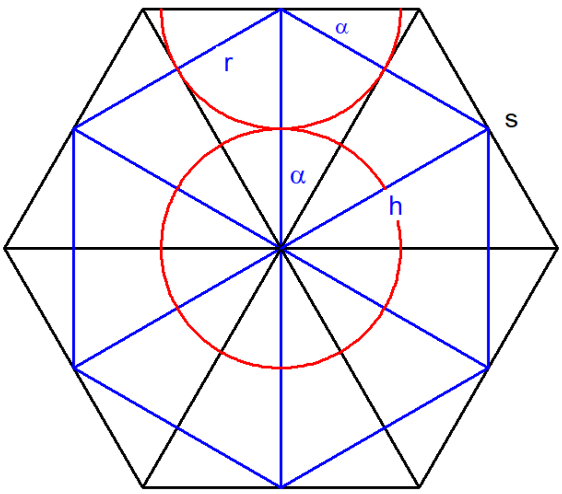
$$b = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{n}{n-2}} \cdot b \Leftrightarrow \left(1 + \sqrt{\frac{n}{n-2}}\right) \cdot b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{n}{n-2}}\right)}$$



Für n = 7 bedeutet dies:

b ≈ 0,228 und a ≈ 0,272.

2. Aufgabe



s = Seitenlänge des n-Ecks, $\alpha = \frac{180°}{n}$

Durch Verbindung der Mittelpunkte der Seiten ergibt sich ein inneres n-Eck.

h = Abstand Mittelpunkt von der Seite des n-Ecks:

$\tan(\alpha) = \frac{s/2}{h} \Leftrightarrow h = \frac{s}{2 \cdot \tan(\alpha)}$

r = Radius des Halbkreises = halbe Seitenlänge des inneren n-Ecks:

$\cos(\alpha) = \frac{r}{s/2} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2} \cdot s \cdot \cos(\alpha)$.

Radius des innen liegenden Kreises: $h-r=\frac{s}{2\cdot\tan(\alpha)}-\frac{1}{2}\cdot s\cdot\cos(\alpha)=\frac{s}{2}\cdot(\frac{1}{\tan(\alpha)}-\cos(\alpha))$

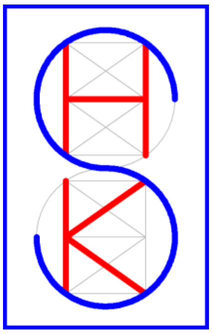
Flächeninhalt des regelmäßigen *n*-Ecks: $A_n=n\cdot\frac{1}{2}\cdot s\cdot h=n\cdot\frac{1}{2}\cdot s\cdot\frac{s}{2\cdot\tan(\alpha)}=n\cdot\frac{s^2}{4}\cdot\frac{1}{\tan(\alpha)}$

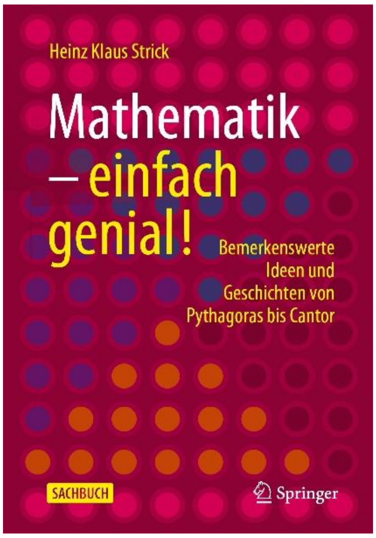
Flächeninhalt der Halbkreise: $A_{hk}=n\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2=n\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(\frac{1}{2}\cdot s\cdot\cos(\alpha))^2=n\cdot\frac{s^2}{8}\cdot\cos^2(\alpha)\cdot\pi$

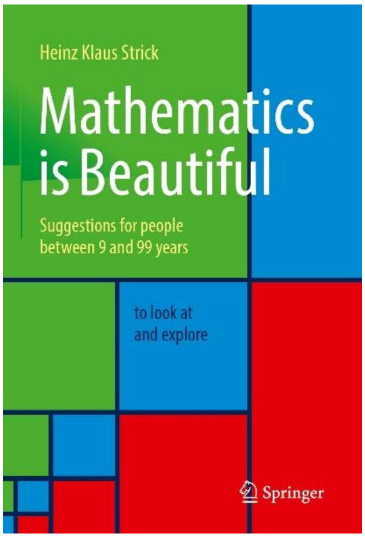
Flächeninhalt des innen liegenden Kreises: $A_i=\frac{s^2}{4}\cdot(\frac{1}{\tan(\alpha)}-\cos(\alpha))^2\cdot\pi$

Übersicht:

n	α	A_n	A_{hk}	A_i	$A_{hk}+A_i$	Anteil
3	600	0,43301	0,29452	0,00470	0,29922	69,10%
4	450	1,00000	0,78540	0,06738	0,85277	85,28%
5	360	1,72048	1,28512	0,25282	1,53795	89,39%
6	300	2,59808	1,76715	0,58905	2,35619	90,69%
7	25,7	3,63391	2,23140	1,08536	3,31676	91,27%
8	22,5	4,82843	2,68152	1,74444	4,42596	91,66%
9	20	6,18182	3,12086	2,56675	5,68761	92,01%
10	18	7,69421	3,55200	3,55200	7,10399	92,33%
11	16,4	9,36564	3,97682	4,69972	8,67654	92,64%
12	15	11,19615	4,39672	6,00943	10,40615	92,94%







- Wenn diese Bücher über mich gekauft werden, geht jeweils 25 % des Verkaufspreises (= mein Buchhändler-Rabatt) als Spende an das **Friedensdorf Oberhausen**.