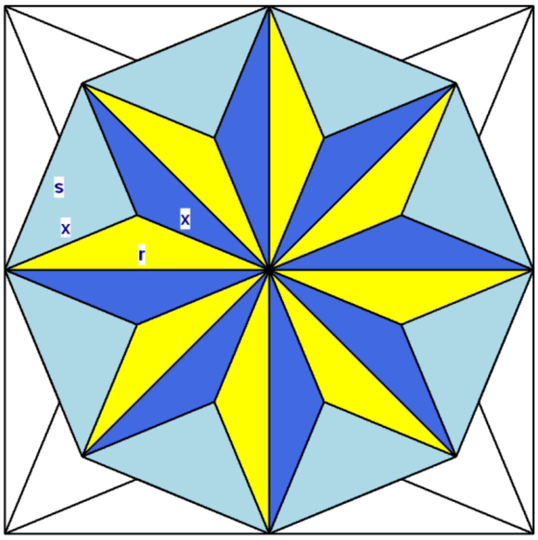
Lösung Problem des Monats Juni 2021 (Senior-Kalender)

Abgebildet sind Sternfiguren, die sich aus einem regelmäßigen 6-Eck, 8-Eck, 10-Eck bzw. 12-Eck mit Seitenlänge *s* ergeben. Von den jeweiligen Mittelpunkten der Figur aus werden zunächst *n* = 6, 8, 10, 12 gleichschenklige Dreiecke mit den Mittelpunktswinkeln 360°/*n* und entsprechenden Basiswinkeln 90° – 180°/*n* gezeichnet.



Diese Dreiecke haben also die Seitenlängen *s* (Basis) und die Schenkel mit der Seitenlänge *r* (= Radius des Umkreises der *n*-Ecke) mit

$\sin(\tfrac{180°}{n}) = \tfrac{s/2}{r}$, also $r = \dfrac{s}{2\sin(\tfrac{180°}{n})}$.

Für den Flächeninhalt der regelmäßigen *n*-Ecke ergibt sich

$$A_{n-Eck} = n \cdot \tfrac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{s}{2 \cdot \tan(\tfrac{180°}{n})} = \tfrac{1}{4} \cdot n \cdot s^2 \cdot \frac{1}{\tan(\tfrac{180°}{n})},$$

wobei die Höhe *y* mithilfe von $y = \dfrac{s}{2 \cdot \tan(\tfrac{180°}{n})}$

berechnet werden kann.

Im nächsten Schritt werden die Mittelpunktswinkel halbiert und auf den Schenkeln der gleichschenkligen Dreiecke entstehen so die gleichschenkligen gelben und dunkel-blauen Dreiecke. Diese Dreiecke haben also eine Basis mit Seitenlänge *r* und Basiswinkel von 180°/*n*; der Winkel, der der Basis gegenüberliegt, hat demnach die Winkelgröße 180° – 360°/n. Die Schenkel der Länge *x* dieser gelben bzw. dunkelblauen Dreiecke berechnen sich dann wie folgt:

$\cos(\tfrac{180°}{n}) = \tfrac{r/2}{x}$, also $x = \dfrac{r}{2\cos(\tfrac{180°}{n})} = \dfrac{r}{4\sin(\tfrac{180°}{n})\cos(\tfrac{180°}{n})} = \dfrac{r}{2\sin(\tfrac{360°}{n})}$ (gemäß Additionstheorem).

Für die Flächeninhalte der gelben und dunkelblauen Dreiecke ergibt sich (wegen $\tan(\tfrac{180°}{n}) = \tfrac{h}{r/2}$) jeweils

$$A = \tfrac{1}{2} \cdot r \cdot \tfrac{r}{2} \cdot \tan(\tfrac{180°}{n}) = \tfrac{1}{4} \cdot r^2 \cdot \tan(\tfrac{180°}{n}) = \tfrac{1}{4} \cdot s^2 \cdot \frac{\tan(\tfrac{180°}{n})}{4 \cdot \sin^2(\tfrac{180°}{n})}$$

$$= \tfrac{1}{4} \cdot s^2 \cdot \frac{1}{4 \cdot \sin(\tfrac{180°}{n}) \cdot \cos(\tfrac{180°}{n})} = \tfrac{1}{8} \cdot s^2 \cdot \frac{1}{\sin(\tfrac{360°}{n})}$$

Somit ergibt sich für den Flächeninhalt eines Sterns:

$$A_{Stern} = 2n \cdot \tfrac{1}{16} \cdot s^2 \cdot \frac{1}{\sin(\tfrac{180°}{n}) \cdot \cos(\tfrac{180°}{n})} = \tfrac{1}{4} \cdot n \cdot s^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sin(\tfrac{180°}{n}) \cdot \cos(\tfrac{180°}{n})} = \tfrac{1}{4} \cdot n \cdot s^2 \cdot \frac{1}{\sin(\tfrac{360°}{n})}.$$

Der Flächenanteil eines Sterns an der Fläche des umgebenden *n*-Ecks ist dann

$$\frac{A_{Stern}}{A_{n-Eck}} = \frac{\tan(\tfrac{180°}{n})}{2\sin(\tfrac{180°}{n})\cos(\tfrac{180°}{n})} = \frac{1}{2\cos^2(\tfrac{180°}{n})}.$$

Die gleichschenkligen hellblauen Dreiecke haben eine Grundseite der Länge s und Schenkel der Länge x. Die Basiswinkel sind 90° – 360°/n, die Winkel gegenüber der Basis haben entsprechend eine Winkelgröße von 720°/n. Für die Flächeninhalte der hellblauen Dreiecke ergibt sich demnach

$$A = \tfrac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{\tfrac{s}{2}}{\tan(\tfrac{360°}{n})} = \tfrac{1}{4} \cdot s^2 \cdot \frac{1}{\tan(\tfrac{360°}{n})}.$$

Die umgebenden Rechtecke sind für n = 8 und n = 12 (und analog weiter auch für n = 16, 20, …) jeweils Quadrate mit Seitenlänge 2r. Für das Flächenverhältnis ergibt sich dann

$$\frac{A_{n-Eck}}{A_{Quadrat}} = \frac{\frac{1}{4}\cdot n\cdot s^2}{4r^2}\cdot\frac{1}{\tan(\frac{180°}{n})} = \frac{1}{16}\cdot n\cdot 4\cdot\sin^2(\tfrac{180°}{n})\cdot\frac{1}{\tan(\frac{180°}{n})}$$
$$= \tfrac{1}{4}\cdot n\cdot\sin(\tfrac{180°}{n})\cdot\cos(\tfrac{180°}{n}) = \tfrac{1}{8}\cdot n\cdot\sin(\tfrac{360°}{n})$$

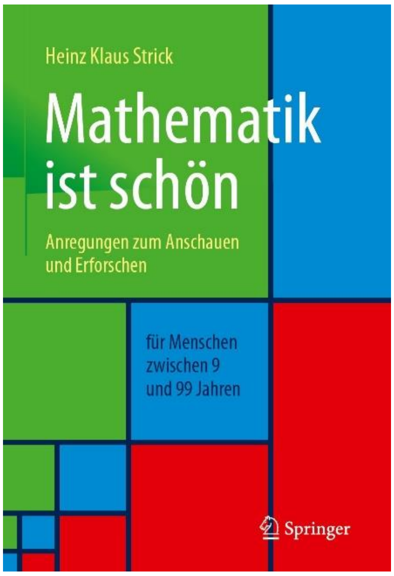
Im Falle n = 6 und n = 10 (und analog weiter auch für n = 14, 18, …) liegen Rechtecke der Höhe 2s und der Breite 2y vor, also

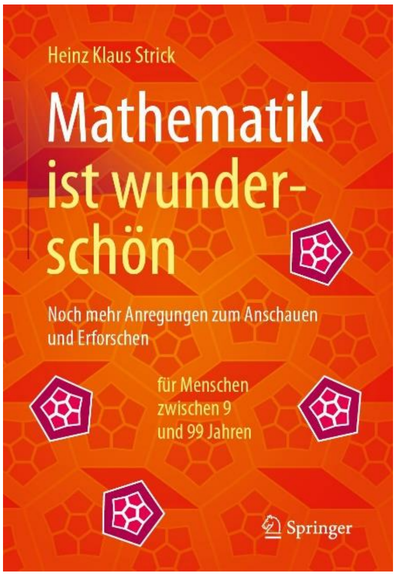
$$\frac{A_{n-Eck}}{A_{Rechteck}} = \frac{\frac{1}{4}\cdot n\cdot s^2}{4\cdot s\cdot y}\cdot\frac{1}{\tan(\frac{180°}{n})} = \frac{n}{8}.$$

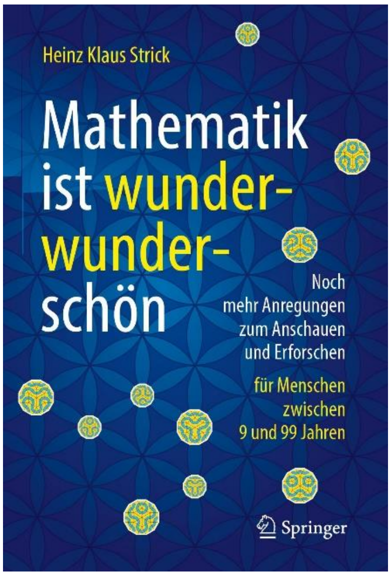
Die Bestimmung der Flächeninhalte der Flächenstücke außerhalb der n-Ecke dürfte jetzt nicht mehr schwer fallen …

Hinweis auf meine drei Bücher über schöne Mathematik

- *Mathematik ist schön* (2017, 2. Auflage 2019)
- *Mathematik ist wunderschön* (2018, 2. Auflage 2020)
- *Mathematik ist wunderwunderschön*
  (2019, die 2. Auflage erscheint im Spätsommer 2021)







➢ Wenn diese Bücher über mich gekauft werden, geht jeweils 25 % des Verkaufspreises als Spende an das **Friedensdorf Oberhausen**.