Kritzeleien in Corona-Zeiten

Aufgabe: Ein Quadrat soll auf möglichst einfache Weise in drei gleich große, *zusammenhängende* Teilflächen unterteilt werden. Einfach soll bedeuten: Unterteilungen mithilfe von Strecken, Viertel-, Halb-, Vollkreisen.

- Welche Möglichkeiten finden Sie?

(Gespiegelte oder gedrehte Figuren gelten nicht als „weitere“ Möglichkeit. Auch lassen sich manche Teilflächen innerhalb der Figur verschieben oder innerhalb von Teilflächen drehen oder spiegeln, was nur in besonderen Fällen untersucht werden soll.)

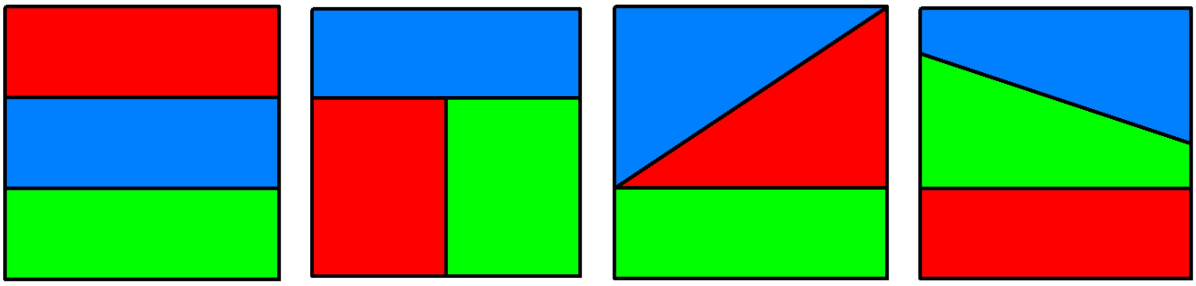
Hinweis: Die Auswahl der Farben rot, grün, blau für die Teilflächen erfolgte zufällig.

Lösung:

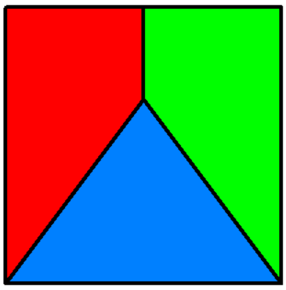
Der Einfachheit halber betrachten wir ein Quadrat der Seitenlänge 1.

In einem ersten Schritt können wir überlegen, welche einfachen geometrischen Teilfiguren mit dem Flächeninhalt ein Drittel eingezeichnet werden können.

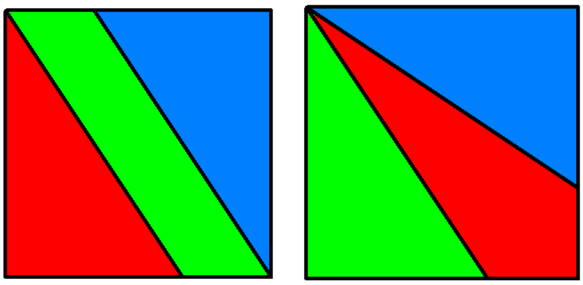
- Die einfachste Figur ist wohl der Rechteckstreifen (Breite 1, Höhe $\frac{1}{3}$). Die restliche Quadratfläche lässt sich auf einfache Weise halbieren (vertikal, diagonal oder mithilfe einer beliebigen Transversalen, die durch den Mittelpunkt des restlichen Rechtecks verläuft).



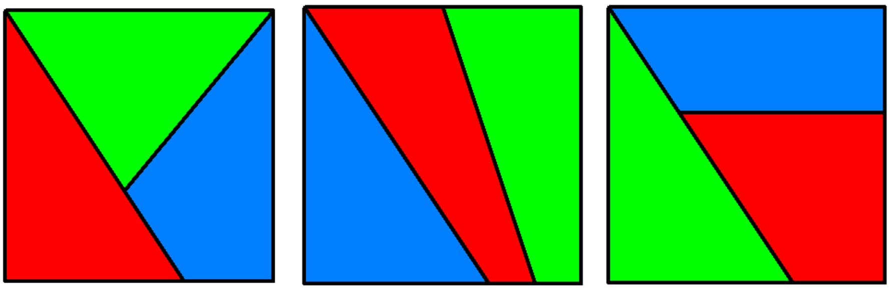
- Als nächste einfache Möglichkeit betrachten wir Dreiecke; wir beginnen mit einem gleichschenkligen Dreieck mit Grundseite 1 und Höhe $\frac{2}{3}$.



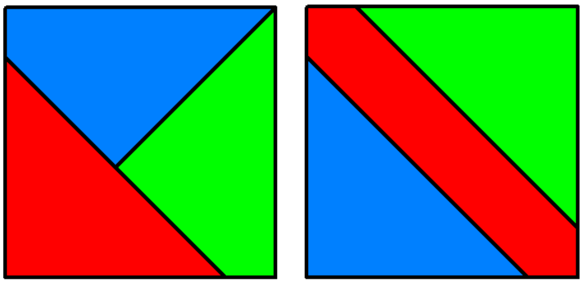
- Eine weitere einfache Dreiecksform sind rechtwinklige Dreiecke, bei denen eine Grundseite die Länge 1 und die Höhe die Länge $\frac{2}{3}$ hat. Auch für die Unterteilung der restlichen Fläche des Ausgangsquadrats (ein *Trapez*) kann dieses rechtwinklige Dreieck verwendet werden.



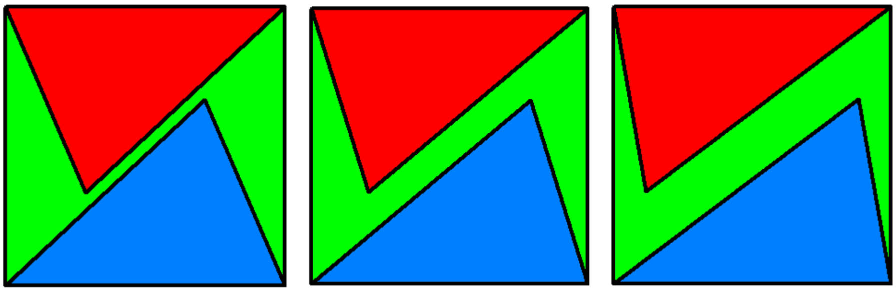
Die Trapezfläche kann beispielsweise durch Einzeichnen eines Dreiecks mit Grundseite 1 und Höhe $\frac{2}{3}$ halbiert werden (grün, vgl. Abb. links). Alternativ kann man die beiden Mittelpunkte der zueinander parallelen Trapezseiten verbinden (vgl. mittlere Abb.) oder das Trapez durch eine Parallele zu den Grundseiten halbieren (vgl. Abb. rechts, *Knobelaufgabe*!)



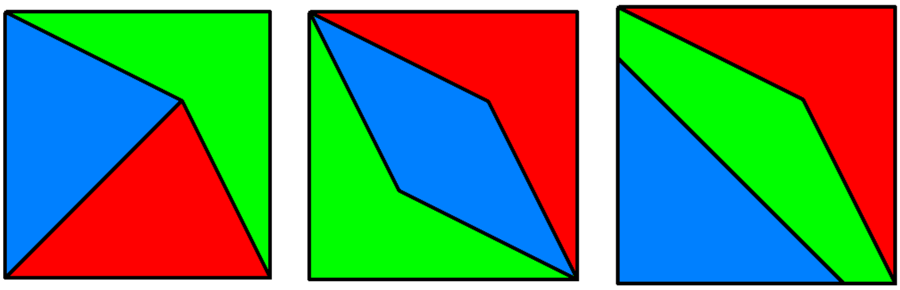
- Das rechtwinklige Dreieck kann auch gleichschenklig sein, also ein halbes Quadrat ergeben, dessen Flächeninhalt $\frac{2}{3}$ ist. Die Seitenlänge ist daher gleich $\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}816$. Die Halbierung der Restfläche kann mithilfe einer Diagonale des Ausgangsquadrats erfolgen oder indem man das rechtwinklige Dreieck in die einander gegenüberliegenden Ecken zeichnet.



- In das Ausgangsquadrat können auch zwei „schiefe" Dreiecke mit einer Grundseite der Länge 1 und einer Höhe der Länge $\frac{2}{3}$ symmetrisch eingetragen werden (*Knobelaufgabe*: Wie weit nach links darf die Höhe des blauen Dreiecks eingetragen werden?)

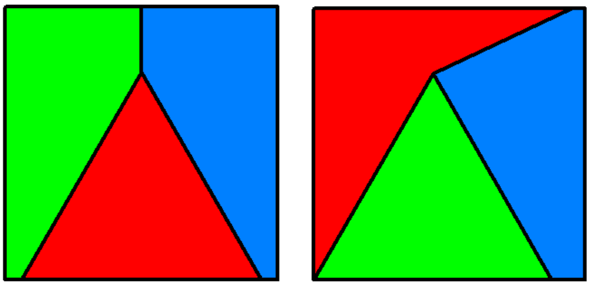


Die beiden Dreiecke mit Höhe $\frac{2}{3}$ können auch an nebeneinanderliegenden Quadratseiten eingezeichnet werden (mit einer gemeinsamen Seite, die auf einer Quadratdiagonalen liegt). Die Restfläche (hier grün) wird oft als *Dart* (Pfeil) bezeichnet. Auch diese *Darts* sind einfache Figuren, die zur Unterteilung eines Quadrats verwendet werden können. Man kann sie doppelt verwenden (vgl. mittlere Abb.) oder mit dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck kombinieren (vgl. Abb rechts).

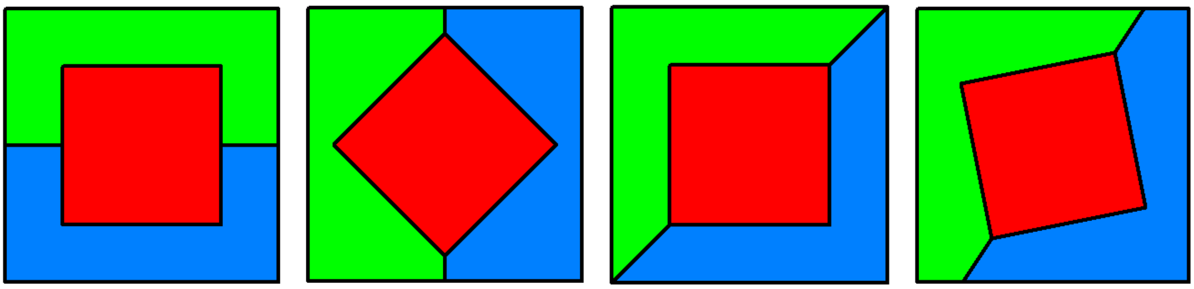


- Für ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a gilt: $\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow a=\sqrt{\frac{4}{3\sqrt{3}}}\approx 0{,}877$; die Höhe dieses Dreiecks ist $h=\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{4}{3\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\approx 0{,}760$.

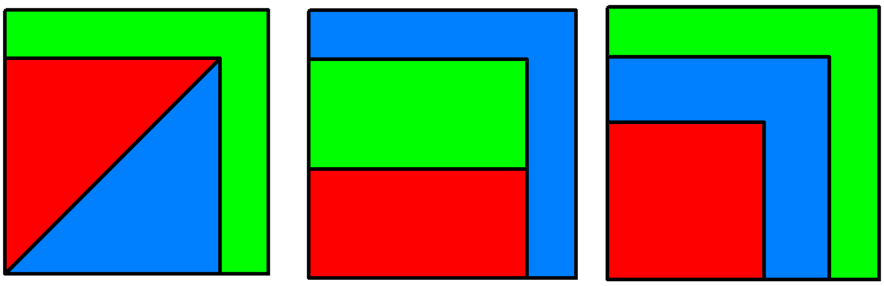
(*Knobelaufgabe*: Wenn das gleichseitige Dreieck nach links in die Ecke verschoben wird, mit welchem Punkt der oberen Quadratseite muss die Spitze des gleichseitigen Dreiecks verbunden werden, damit die Drittelung der Fläche des Ausgangsquadrats gewährleistet ist? – vgl. Abb. rechts)



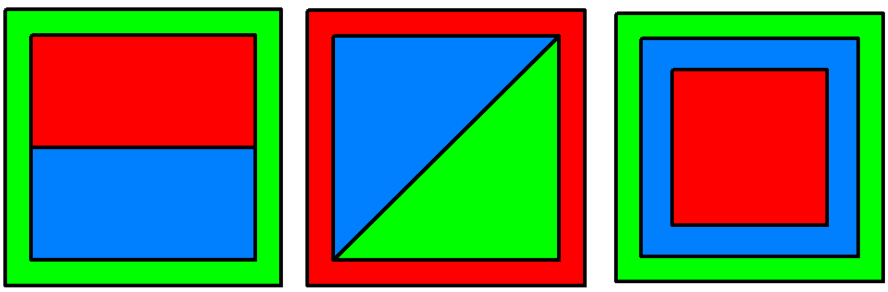
- Ein Quadrat mit Flächeninhalt $\frac{1}{3}$ hat die Seitenlänge $\sqrt{\frac{1}{3}}\approx 0{,}577$. Die Unterteilung der Restfläche kann auch dadurch erfolgen, dass man eine Diagonale des einbeschriebenen Quadrats als Hilfslinie einzeichnet; längs dieser Hilfslinie kann das innen liegende Quadrat verschoben werden ...



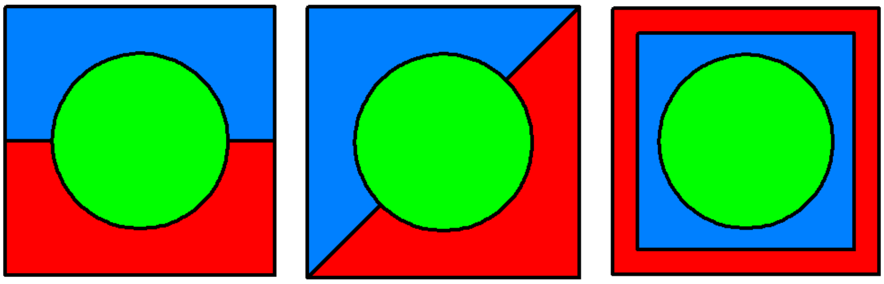
- Trennt man eine Quadratfläche mit Flächeninhalt $\frac{2}{3}$ ab, also mit Seitenlänge $\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}816$, dann bleibt ein L-förmiger Randstreifen mit Flächeninhalt $\frac{1}{3}$ übrig. Auch dieses sog. *Gnomon* ist ein einfaches Element, das zur Unterteilung weiter verwendet werden kann.



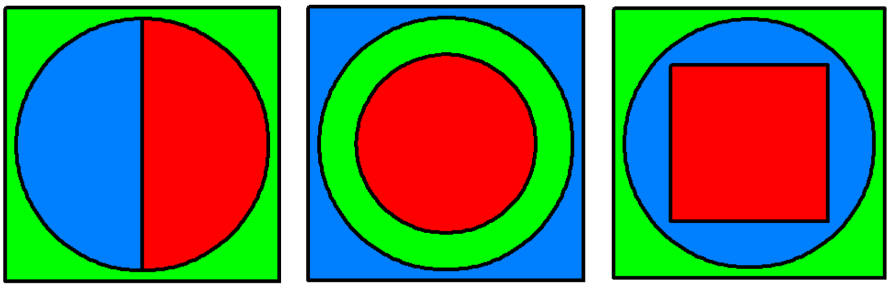
- Zeichnet man das Quadrat mit Flächeninhalt $\frac{2}{3}$ zentral ein, dann liegt außen ein *rechtwinkliger Ringstreifen* mit Flächeninhalt $\frac{1}{3}$. Das Innere kann auf verschiedene Arten geteilt werden.



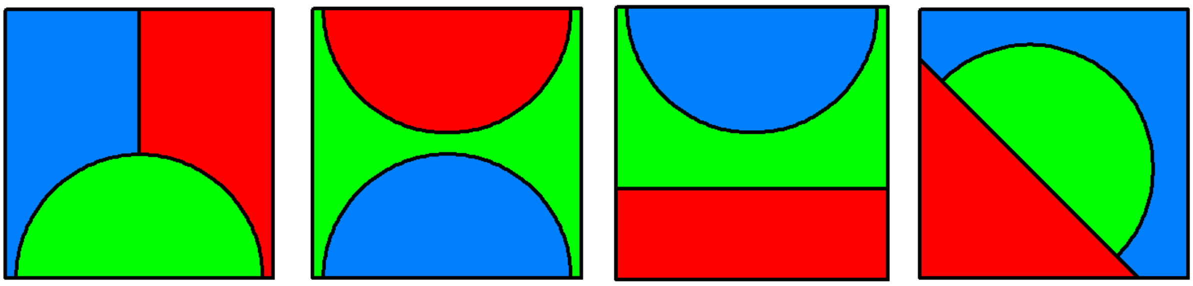
- In das Ausgangsquadrat kann ein Kreis eingezeichnet werden; aus $\pi \cdot r^2 = \frac{1}{3}$ ergibt sich für den Radius $r = \sqrt{\frac{1}{3\pi}} \approx 0,326$. Die restliche Fläche kann durch Einzeichnen einer beliebigen, durch den Mittelpunkt des Ausgangsquadrats verlaufenden Gerade geteilt werden. Der Kreis kann auch in Kombination mit dem *rechtwinkligen Ringstreifen* zur Drittelung der Quadratfläche verwendet werden.



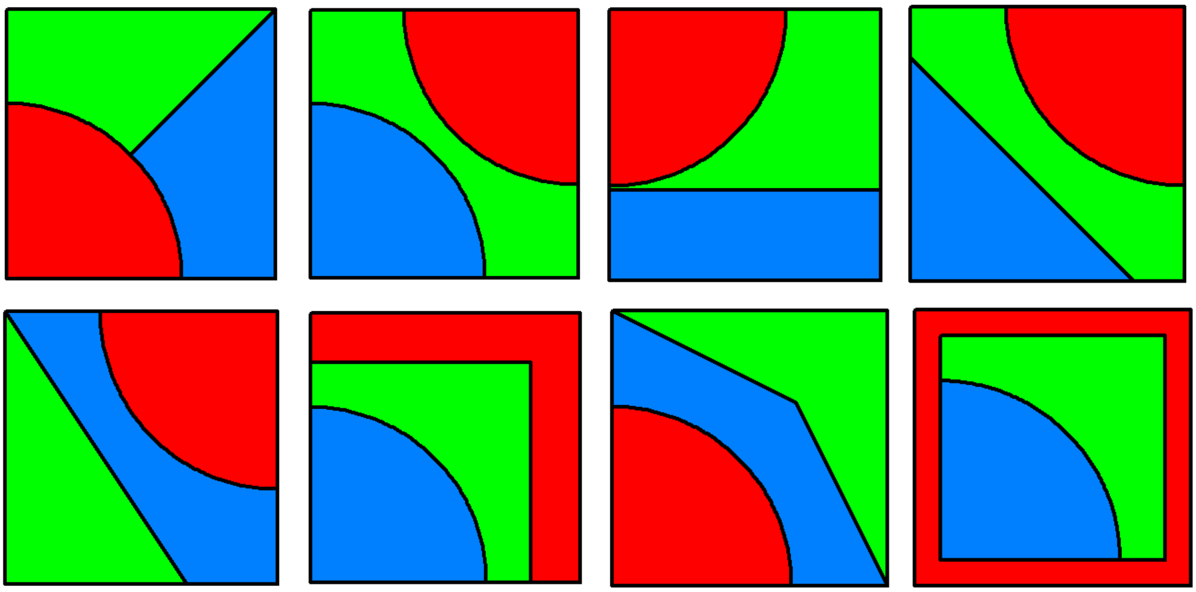
- Zeichnet man eine Kreisfläche mit Flächeninhalt $\frac{2}{3}$ ein, also $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{2}{3}$, dann gilt für den Radius des großen Kreises $R = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \approx 0,461$. Das Innere des größeren Kreises kann auf verschiedene Arten halbiert werden. (*Knobelaufgabe*: Passt ein gleichseitiges Drittel-Dreieck in den großen Kreis?)



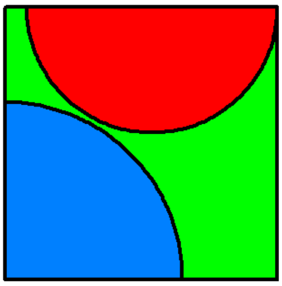
- Für Halbkreise mit Flächeninhalt $\frac{1}{3}$ gilt: Aus $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{3}$ folgt für den Radius $r = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \approx 0,461$; die restliche Fläche kann durch Einzeichnen einer Symmetrieachse geteilt werden. Auch kann der Halbkreis zur Teilung der restlichen Quadratfläche verwendet werden.



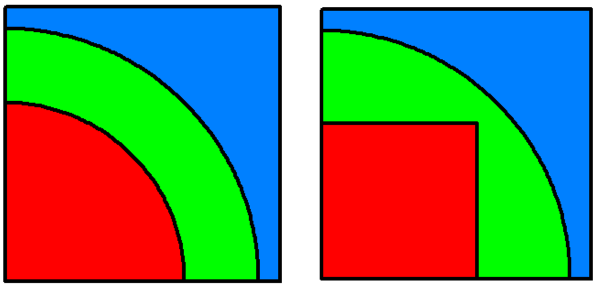
- Auch Viertelkreise sind möglich: Aus $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{3}$ folgt für den Radius $r = \sqrt{\frac{4}{3\pi}} \approx 0,651$, also etwas weniger als $\frac{2}{3}$; daher passt der Viertelkreis so gerade noch in einen Rechteckstreifen der Höhe $\frac{1}{3}$ (vgl. dritte Figur). Auch für andere Unterteilungen der restlichen Fläche des Ausgangsquadrats kann der Viertelkreis verwendet werden.
  Die folgenden Grafiken zeigen mögliche Kombinationen des Viertelkreises mit rechtwinkligen Dreiecken, mit einem *Gnomon*, mit einem *Dart* sowie mit einem *rechtwinkligen Ringstreifen*.



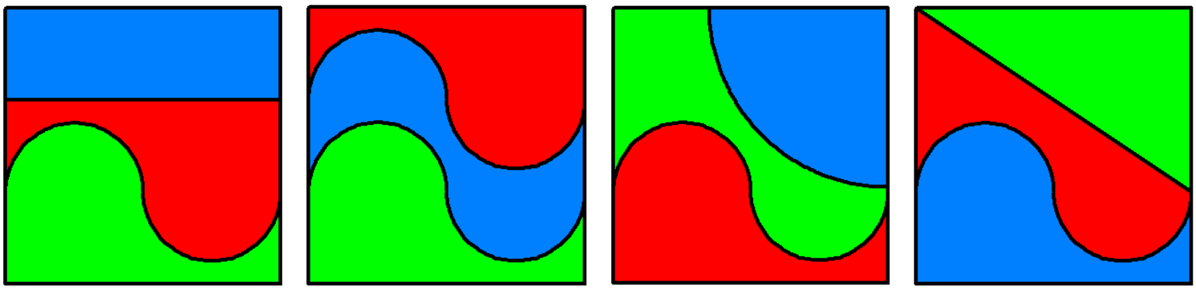
In die Restfläche eines Quadrats, bei dem ein Viertelkreis eingezeichnet ist, passt ein Halbkreis, wenn dieser nicht mittig positioniert wird. (*Knobelaufgabe*: Bei welcher Lage des Halbkreismittelpunkts berühren sich Halbkreis und Viertelkreis? Dieser Fall darf bei der hiergestellten Aufgabe nicht eintreten – denn das Ausgangsquadrat soll in drei *zusammenhängende* Flächen unterteilt werden.)



Analog zu den Kreisringen oben kann man auch Viertelkreisringe zeichnen: Aus $\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot R^2=\frac{2}{3}$ folgt für den Radius $R=\sqrt{\frac{8}{3\pi}}\approx 0{,}921$.

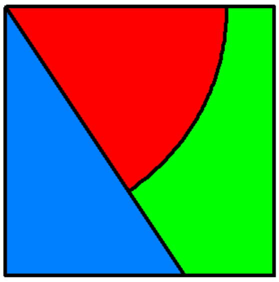


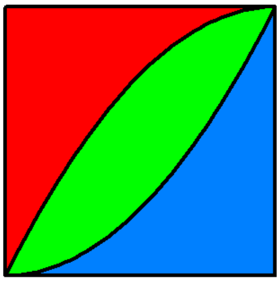
Weitere Varianten ergeben sich, wenn man die Rechteckstreifen vom Anfang durch Halbkreise im Sinne von Yin & Yang verändert: Man zeichnet jeweils einen Halbkreis mit Radius $\frac{1}{4}$ nach oben bzw. nach unten.



Zusatz: Die folgenden beiden Figuren sind auch „einfach“, wenn man etwas Trigonometrie bzw. Integralrechnung kennt:

- In der ersten Abbildung wird die Ergänzungsfläche zum (blauen) rechtwinkligen Dreieck durch einen passenden Kreissektor (rot) unterteilt. Hierfür benötigt man den zugehörigen Mittelpunktswinkel: Für den oberen Winkel im blauen Dreieck gilt: $\tan(\alpha) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \alpha \approx 33{,}69°$. Der Mittelpunktswinkel im roten Sektor ist also ungefähr gleich 56,31°. Für den Radius des Kreissektors gilt daher $\frac{56{,}31°}{360°} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow r \approx \sqrt{\frac{360°}{3\pi \cdot 56{,}31°}} \approx 0{,}824$.
- In der zweiten Abbildung sind zwei quadratische Parabeln in das Quadrat eingezeichnet. Im Rahmen der Integralrechnung wird gezeigt, dass die Fläche unter dem Graphen der Normalparabel mit $y = x^2$ im Intervall [0 ; 1] genau $\frac{1}{3}$ beträgt.





Ergänzung: Bernd Bultmann aus Butjadingen hatte die Idee zu einer Herzfigur:

Diese setzt sich zusammen aus einem Quadrat mit zwei aufgesetzten Halbkreisen. Für die Seitenlänge *a* des Quadrats muss also gelten $a^2 + \pi \cdot (\frac{a}{2})^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a^2 \cdot (1 + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{4}{3 \cdot (4+\pi)}} \approx 0{,}432$.

Die Figur lässt sich mit sich selbst sowie mit weiteren einfachen Figuren kombinieren.

(*Knobelaufgabe*: Würde zum Herz links unten auch ein Quadrat rechts oben passen?)