Ägyptische Zerlegungen

Bekanntlich verwendeten die alten Ägypter im Rahmen der Bruchrechnung – von den Ausnahmen $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ abgesehen – nur Stammbrüche, also Kehrwerte von natürlichen Zahlen.

Der von FIBONACCI (LEONARDO VON PISA, 1170 – 1250) entwickelte *gierige Algorithmus* (vgl. *Mathematik ist wunderschön*, Kap. 6) garantiert eine Zerlegung eines beliebigen echten Bruchs in eine oft überraschend kleine Anzahl von Stammbrüchen.

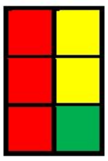
Man kann leicht überlegen, dass es unendlich viele Summendarstellungen von Brüchen durch verschiedene Stammbrüche gibt. In diesem Zusammenhang liegt es nahe zu untersuchen, wie viele Summendarstellungen mit zwei, drei, vier, … voneinander verschiedenen Summanden existieren.

Als Motivation, sich überhaupt mit solchen Untersuchungen zu beschäftigen, kann die folgende Knobelaufgabe dienen:

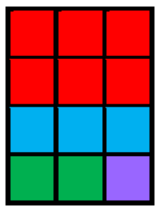
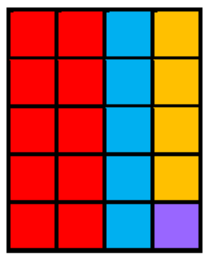
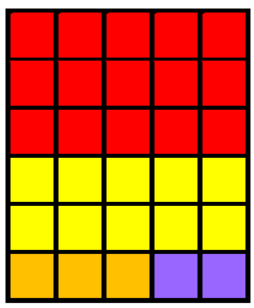
- *Auf wie viele Arten lässt sich die Zahl 1 als Summe von lauter verschiedenen Stammbrüchen darstellen?*

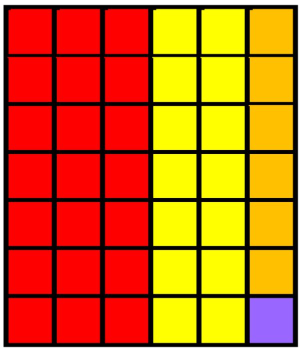
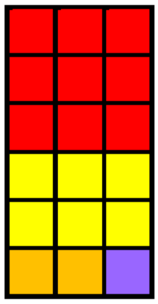
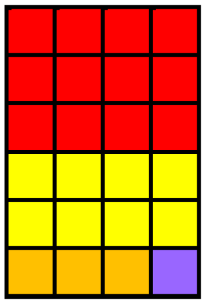
Offensichtlich gibt es nur *eine* Möglichkeit, die Zahl 1 als Summe von *drei* voneinander verschiedenen Stammbrüchen darzustellen: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3+2+1}{6}=1$.

Dies kann man wie folgt visualisieren: Da der größte auftretende Nenner der Summendarstellung gleich 6 ist und diese Zahl als Produkt 6 = 2 · 3 geschrieben werden kann, bietet es sich an, die Einheit 1 als ein Rechteck mit den Seitenlängen 2 und 3 darzustellen. Dann wird der erste Summand $\frac{1}{2}$ repräsentiert durch drei (*rot* gefärbte) Kästchen, der zweite Summand $\frac{1}{3}$ durch zwei (*gelb* gefärbte) Kästchen, der dritte Summand $\frac{1}{6}$ durch ein (*grün* gefärbtes) Kästchen – entsprechend der o. a. Summendarstellung.



Durch systematisches Probieren findet man die sechs möglichen Darstellungen der Zahl 1 als Summe von *vier* verschiedenen Stammbrüchen:

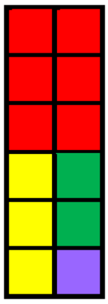
• $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{6+3+2+1}{12}=1$, – dargestellt mithilfe eines 3×4-Rechtecks (Farbe blau für die drei Rechenkästchen, die zusammen den Wert $\frac{1}{4}$ repräsentieren – auch im Folgenden).	
• $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{10+5+4+1}{20}=1$, – dargestellt mithilfe eines 4×5-Rechtecks.	
• $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{15+10+3+2}{30}=1$, – dargestellt mithilfe eines 5×6-Rechtecks.	

• $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}=\frac{21+14+6+1}{42}=1$, – dargestellt mithilfe eines 6×7-Rechtecks.	
• $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{9+6+2+1}{18}=1$, – dargestellt mithilfe eines 3×6-Rechtecks.	
• $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}=\frac{12+8+3+1}{24}=1$, – dargestellt mithilfe eines 4×6-Rechtecks.	

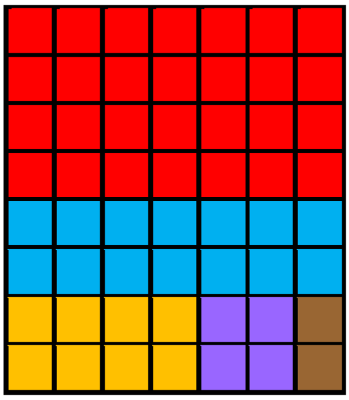
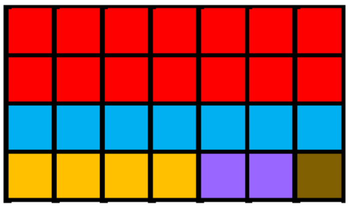
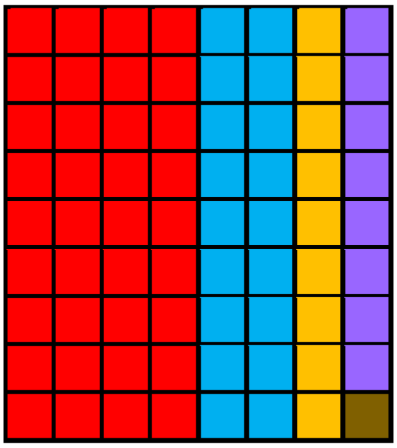
Es fällt auf, dass zur Darstellung die Rechtecke des Typs 3×4, 4×5, 5×6, 6×7 verwendet werden, außerdem Rechtecke vom Typ 3×6 sowie 4×6.

Steckt hier vielleicht irgendein System dahinter?

- Welche Zerlegung ergibt sich für ein 2×6-Rechteck?

Bei der Summendarstellung $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{6+3+2+1}{12}=1$ tritt 12 als größter Nenner auf, und diese Zahl kann auch als Produkt 2 · 6 dargestellt werden – die zugehörige Darstellung rechts entspricht der Unterteilung der Figur oben. Entsprechendes gilt für das 2×10-Rechteck (anstelle des 4×5-Rechtecks) sowie für das 3×14-Rechteck (anstelle des 6×7-Rechtecks).	

- Was ergibt sich, wenn man die „Folge“ von Rechtecken 3×4, 4×5, 5×6, 6×7 fortsetzt?

• Durch das 7×8-Rechteck lässt sich die Summe $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=\frac{14+7+4+2+1}{28}=1$ veranschaulichen, eine Darstellung der Summe 1 mithilfe von *fünf* Summanden. Der größte Nenner ist 28 (und nicht 56); man sieht unmittelbar, dass man die einzelnen Farbbereiche im 7×8-Rechteck rechts halbieren könnte. Zur Veranschaulichung der Summendarstellung von $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=\frac{14+7+4+2+1}{28}=1$ genügt also ein 4×7-Rechteck.	 
• Durch das 8×9-Rechteck kann die Summe $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{72}=\frac{36+18+9+8+1}{72}=1$ veranschaulicht werden, ebenfalls eine Summe mit *fünf* Summanden.	

In den o. a. Summendarstellungen der Zahl 1 steht rechts jeweils ein Bruch, dessen Zähler lauter Teiler des Nenners enthält, deren Summe gleich dem Nenner ist.

Eine Strategie, Summendarstellungen von Stammbrüchen für die Zahl 1 zu finden, könnte also so aussehen:

- Man notiert alle echten Teiler der Zahl, die im Nenner steht, und sucht dann unter diesen die passenden aus, deren Summe gleich dem Nenner ist.

In Frage kommen also nur solche natürlichen Zahlen, bei denen die Summe aller echten Teiler mindestens so groß ist wie die Zahl selbst, also alle *vollkommenen* Zahlen (wie 6 und 28), bei denen die Summe der echten Teiler genau gleich der Zahl selbst ist, sowie alle *abundanten* Zahlen (vgl. hierzu *Mathematik ist wunderwunderschön*, Kap. 4).

Die kleinste abundante natürliche Zahl ist 12 mit den echten Teilern 1, 2, 3, 4 und 6. Offensichtlich gibt es nur zwei Möglichkeiten, die Zahl 12 als Summe aus diesen echten Teilern darzustellen:

$6 + 4 + 2 = 2 \cdot (3 + 2 + 1) = 12$ und $6 + 3 + 2 + 1 = 12$

(Dies entspricht den o. a. Summendarstellungen $\frac{3+2+1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ und $\frac{6+3+2+1}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1$, wobei die erste Möglichkeit wieder auf die vollkommende Zahl 6 führt.

Die nächsten abundanten natürlichen Zahlen sind 18, 20, 24, 30, 36, 42 und 48. Hierzu gehören die folgenden Mengen echter Teiler und hieraus ergeben sich Summendarstellungen von 1, die wir teilweise bereits oben erfasst haben:

$T_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9\}$ und $\frac{9+6+2+1}{18}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=1$,

$T_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10\}$ und $\frac{10+5+4+1}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=1$,

T_{24} = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12} und $\frac{12+8+3+1}{24}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}=1$ (und $\frac{12+8+4}{24}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3+2+1}{6}=1$, $\frac{12+6+4+2}{24}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{6+3+2+1}{12}=1$),

T_{30} = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15} und $\frac{15+10+3+2}{30}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=1$ sowie $\frac{15+6+5+3+1}{30}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}=1$ (und $\frac{15+10+5}{30}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3+2+1}{6}=1$),

T_{36} = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18} und $\frac{18+12+3+2+1}{36}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=1$, $\frac{18+9+4+3+2}{36}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}=1$, $\frac{12+9+6+4+3+2}{36}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}=1$ (die Vielfachen von oben werden von hier an nicht mehr aufgeführt),

T_{42} = {1, 2, 3, 6, 7, 14, 21} und $\frac{21+14+6+1}{42}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}=1$,

T_{48} = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24} und $\frac{24+16+4+3+1}{48}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{1}{48}=1$, $\frac{24+12+8+3+1}{48}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{48}=1$, $\frac{24+12+6+3+2+1}{48}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}=1$, $\frac{24+8+6+4+3+2+1}{48}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}=1$, $\frac{16+12+8+6+3+2+1}{48}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}=1$.

Die graphische Umsetzung der hier gefundenen Summendarstellung überlasse ich der Leserin/dem Leser.

Diese über die Untersuchung der Teilermengen gefundenen Summendarstellungen definieren einen weiteren Suchalgorithmus für ägyptische Zerlegungen. Bezogen auf die Visualisierung mithilfe von Rechtecken auf Kästchen-Papier könnte man die Fragestellung wie folgt formulieren:

- **Gesucht sind alle Zerlegungen von Rechtecken (mit ganzzahligen zueinander teilerfremden Seitenlängen) in lauter voneinander verschiedene Teilrechtecke.**

Während beim FIBONACCI-Algorithmus die Vorgabe gemacht wird, dass alle bis auf das letzte Rechteck möglichst groß sind, spielt die Größe der Rechtecke keine Rolle.

Die Erfahrungen mit den Summendarstellungen der Zahl 1 eröffnen eine allgemeine Strategie zur Darstellung von beliebigen echten Brüchen als Summe von Stammbrüchen. Während man beim gierigen FIBONACCI-Algorithmus so vorgeht, dass man von einem gegebenen Bruch einen möglichst großen Stammbruch subtrahiert, und von dieser Differenz dann wieder einen möglichst großen Stammbruch usw., sucht man alle möglichen Darstellungen.

Dass sich diese für die Summe 1 entwickelte Vorgehensweise auch für die Summendarstellung von beliebigen Brüchen anwenden lässt, soll an zwei Beispielen erläutert werden, mit denen der FIBONACCI-Algorithmus in *Mathematik ist wunderschön* eingeführt wird:

Als erste Beispiele werden dort die Brüche $\frac{4}{5}$ und $\frac{3}{7}$ betrachtet.

Da der Nenner des Bruchs $\frac{4}{5}$ außer 1 keine echten Teiler besitzt, erweitern wir den Bruch:

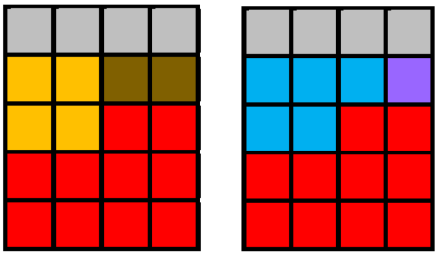
$$\frac{4}{5}=\frac{8}{10}=\frac{12}{15}=\frac{16}{20}=\frac{20}{25}=\frac{24}{30}=\ldots$$

und kommen so als Erstes auf den abundanten Nenner 20, aus dessen Menge der echten Teiler T_{20} = {1, 2, 4, 5, 10} dann Summendarstellungen für den zugehörigen Zähler 16 gefunden werden können:

16 = 10 + 4 + 2 = 10 + 5 + 1.

Hieraus ergibt sich: $\frac{4}{5}=\frac{16}{20}=\frac{10+4+2}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$ und $\frac{4}{5}=\frac{16}{20}=\frac{10+5+1}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$,

wobei die zweite Darstellung diejenige ist, die man mithilfe des gierigen Algorithmus findet.



Analog ergibt sich

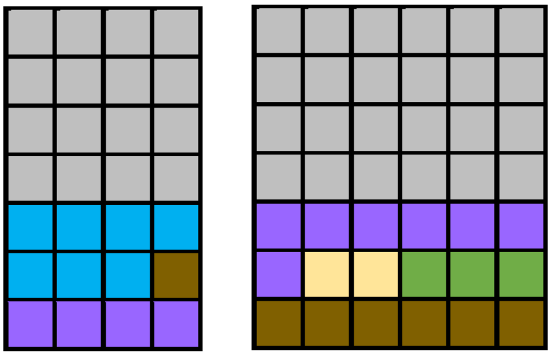
$\frac{3}{7} = \frac{6}{14} = \frac{9}{21} = \frac{12}{28} = \frac{15}{35} = \frac{18}{42} = \ldots$

Aus T_{28} = {1, 2, 4, 7, 14} ergibt sich abweichend vom FIBONACCI-Algorithmus $\frac{3}{7} = \frac{12}{28} = \frac{7+4+1}{28} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28}$.

Aus T_{42} = {1, 2, 3, 6, 7, 14, 21} folgt entsprechend $\frac{3}{7} = \frac{18}{42} = \frac{14+3+1}{42} = \frac{1}{3} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$.

Und noch eine weitere Summendarstellung mit vier Summanden ist möglich:

$\frac{3}{7} = \frac{18}{42} = \frac{7+6+3+2}{42} = \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}$.



Es fällt auf, dass die einzelnen Flächen nicht notwendig Rechtecke sind.