Lösung Problem des Monats April 2021 (Senior-Kalender)

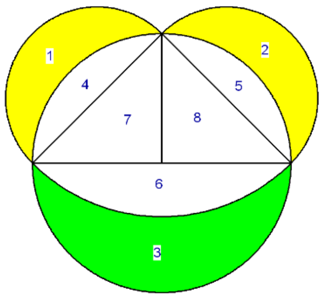
Die Aussage des Satzes von Pythagoras gilt nicht nur für Quadrate über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, sondern für beliebige *zueinander ähnliche Flächenstücke*.

Dies hängt mit einem allgemeinen Satz über ähnliche geometrische Figuren F_1 und F_2 zusammen. Dieser besagt: Gilt für einander entsprechende Seiten (Bögen) s_1 und s_2 der beiden Figuren, dass gilt $s_1 = k \cdot s_2$ mit $k > 0$, dann gilt für die Flächeninhalte der beiden Figuren, dass $A_1 = k^2 \cdot A_2$.

Aus $a^2 + b^2 = c^2$ folgt daher entsprechend $(k \cdot a)^2 + (k \cdot b)^2 = (k \cdot c)^2$.

Beispielsweise ist dieser Faktor k für einen Halbkreis gleich $^1/_8 \cdot \pi$.

In der **ersten Figur** sind die Flächenstücke 4, 5 und 6 zueinander ähnlich; denn sie entstehen dadurch, dass man von einem Viertelkreis (4 + 7) und (5 + 8) sowie (7 + 8 + 6) ein rechtwinkliges Dreieck abschneidet (4 bzw. 7 bzw. 7 + 8).



Somit gilt: 4 + 5 = 6.

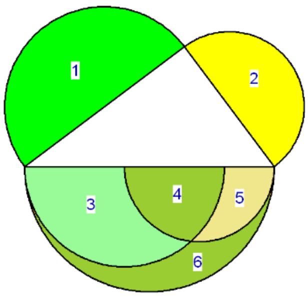
Andererseits gilt gemäß dem Satz von Pythagoras für die beiden Halbkreise über den Katheten (also 1 + 4 bzw. 2 + 5), dass diese zusammen so groß wie der Halbkreis über der Hypotenuse:

(1 + 4) + (2 + 5) = (6 + 3).

Hieraus folgt daher: 1 + 2 = 3.

Übrigens: Der in der Figur vorhandene große Kreis besteht aus zwei Halbkreisen. Für die obere und untere Hälfte des Kreises gilt: (6 + 3) = (4 + 7) + (5 + 8). Andererseits haben wir gezeigt, dass auch die Beziehung (6 + 3) = (1 + 4) + (2 + 5) gilt. Betrachtet man die rechten Seiten der beiden Gleichungen, dann folgt hieraus: 1 + 2 = 7 + 8, d. h., die beiden gelb gefärbten Möndchen sind so groß wie das rechtwinklige Ausgangsdreieck. Und da diese beiden kleinen Möndchen so groß sind wie das grün gefärbte Möndchen, folgt schließlich auch: Das rechtwinklige Dreieck (7 + 8) ist auch so groß wie das grün gefärbte große Möndchen.

Das wusste übrigens schon Hippokrates von Chios (um 450 v. Chr.)



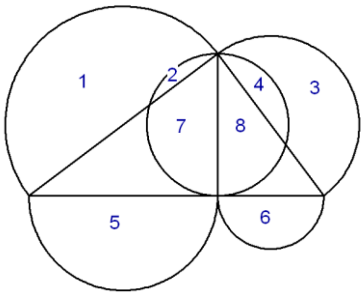
Bei der **zweiten Figur** besteht der Halbkreis über der Hypotenuse aus den Flächenstücken 3 + 4 + 5 + 6, andererseits ist dieser Halbkreis so groß wie die Summe der beiden Halbkreise über den Katheten, also

3 + 4 + 5 + 6 = 1 + 2.

Die beiden Halbkreise über den Katheten sind in der Figur auch jeweils unten eingezeichnet: 3 + 4 = 1 und 4 + 5 = 2.

Somit haben wir insgesamt: 3 + 4 + 5 + 6 = (3 + 4) + (4 + 5).

Durch einfache Umformung ergibt sich hieraus: 6 = 4, d. h., die beiden olivgrün gefärbten Flächenstücke sind gleichgroß.



Bei der **dritten Figur** ist die Höhe auf der Hypotenuse eingezeichnet, das „große“ rechtwinklige Dreieck wird also in zwei kleinere rechtwinklige Dreiecke zerlegt, in denen jeweils der Satz von PYTHAGORAS angewandt wird:

(1 + 2) = (4 + 8) + 5 und (3 + 4) = (2 + 7) + 6.

Für die gelb gefärbte Flächen gilt daher:

1 + 3 = (4 + 8) + 5 – 2 + (2 + 7) + 6 – 4 = 5 + 6 + 7 + 8 = grün

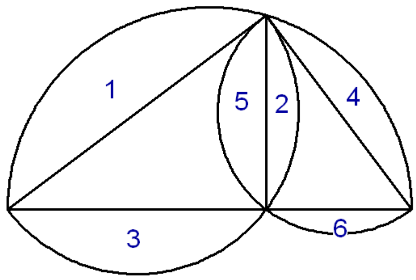
---

Die gleiche Unterteilung wie bei der dritten Figur benötigen wir auch für **die sechste Figur**:

Die Färbung deutet darauf hin, dass nachzuweisen ist, dass
(1 + 2) + 6 = (3 + 4) + 5.

Betrachten wir die ersten beiden Gleichungen der letzten Figur, dann ergibt sich:

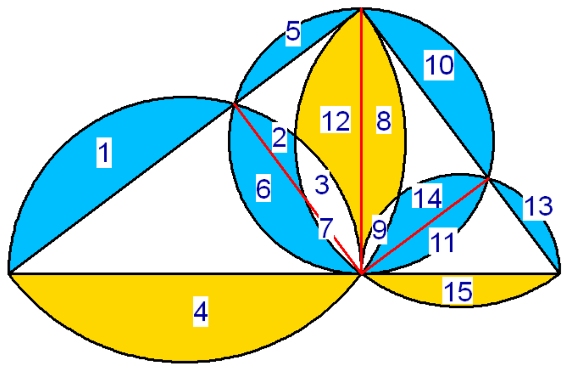
(1 + 2) + 6 = (4 + 8) + 5 + (3 + 4) – (2 + 7) und wegen
(4 + 8) = (2 + 7) dann weiter die gesuchte Beziehung: (1 + 2) + 6 = 5 + (3 + 4).



Bei der **vierten Figur** wird der Zusammenhang, der in der ersten Figur beschrieben wurde, auf die beiden rechtwinkligen Teildreiecke angewandt: 2 + 3 = 1 und 5 + 6 = 4

Daher ist 1 + 4 = rosa/violett = 2 + 3 + 5 + 6 = grün/oliv

Bei der **fünften Figur** sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke, die durch das Einzeichnen der Höhe entstanden sind, wiederum durch Einzeichnen einer Höhe unterteilt worden.



In den vier einzelnen rechtwinkligen Dreiecke gilt dann für die Bogenstücke über den Seiten:

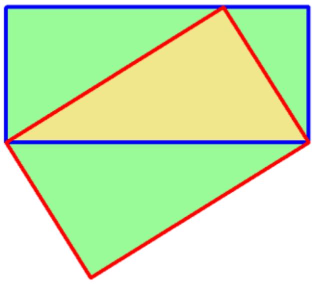
1 + (2 + 3) = 4 und 5 + (6 + 7) = 8 + 9 und

10 + 11 = (12 + 3 + 7) und (14 + 9) + 13 = 15

Die goldgelb gefärbten Flächen ergeben zusammen 4 + 15 + 12 + 8.

Ersetzt man diese gemäß der vorliegenden Beziehungen, dann erhält man nacheinander

4 + 15 + 12 + 8 = (1 + 2 + 3) + (14 + 9 + 13) +(10 + 11 – 3 – 7) + (5 + 6 + 7 – 9)
= 1 + 2 + 5 + 6 + 10 + 11 + 13 + 14 = blau



Bei der letzten Figur handelt es sich um ein rechtwinkliges Dreieck (gelb gefärbt), über dessen Seiten zueinander ähnliche rechtwinklige Dreiecke gezeichnet sind. Diese drei rechtwinkligen Dreiecke sind außerdem auch ähnlich zum gelb gefärbten Ausgangsdreieck – vielleicht ist es etwas irritierend, dass das rechtwinklige Dreieck über der Hypotenuse im Vergleich zu den rechtwinkligen Dreiecken über den Katheten gespiegelt gezeichnet ist.

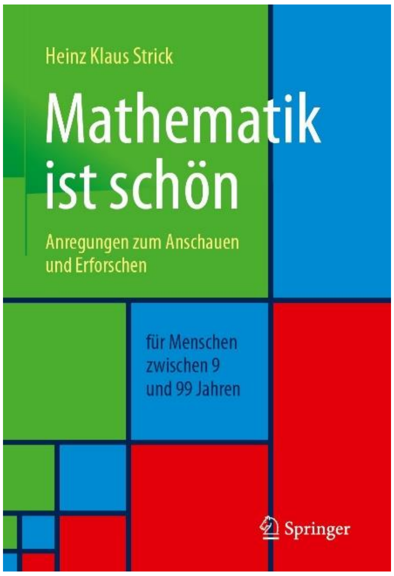
Betrachtet man nur das blau eingerahmte Rechteck, dann ist dieses unterteilt in zwei grün gefärbte rechtwinklige Dreiecke, die zusammen genauso groß sind wie das gelb gefärbte rechtwinklige Dreieck, d. h., das gelb gefärbte rechtwinklige Dreieck ist halb so groß wie das blau eingerahmte Rechteck.

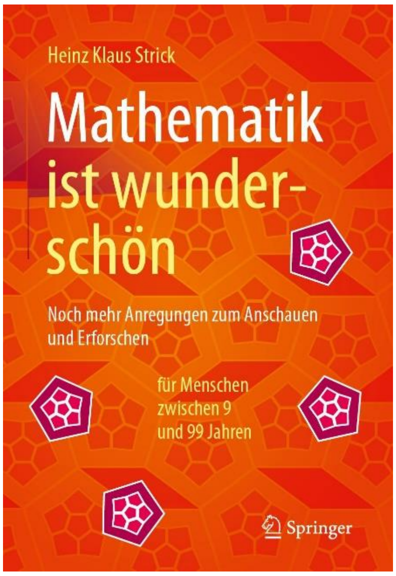
- Zum Weiterdenken: Kann man beliebige Rechteckflächen auf diese Weise halbieren?

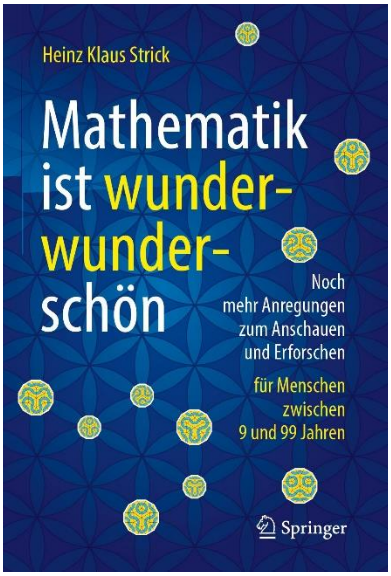
Ähnliche Figuren im Zusammenhang mit dem Satz von PYTHAGORAS sind in Kap. 17 von Mathematik ist schön enthalten.

Hinweis auf meine drei Bücher über schöne Mathematik

- *Mathematik ist schön* (2017, 2. Auflage 2019)
- *Mathematik ist wunderschön* (2018, 2. Auflage 2020)
- *Mathematik ist wunderwunderschön*
  (2019, die 2. Auflage erscheint im Spätsommer 2021)







- Wenn diese Bücher über mich gekauft werden, geht jeweils 25 % des Verkaufspreises als Spende an das **Friedensdorf Oberhausen**.