Lösung Problem des Monats April 2021 (Junior-Kalender)

(1) Um die Position a zu besetzen, hat man 6 Möglichkeiten, für b dann jeweils 5 Möglichkeiten, für c 4 Möglichkeiten usw., also insgesamt 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 720 Möglichkeiten, das Schema auszufüllen.

(2) Die kleinst-mögliche Summe ergibt sich, wenn an der Hunderterstelle der dritten Zahl eine 1 steht und wenn an beiden den Zehnerstellen eine 2 oder eine 3 steht; für die Einerstellen bleiben dann die Ziffern 4, 5, 6:

Da es keine Rolle spielt, an welcher Stelle die 2 bzw. die 3 als Zehner steht und die 4, 5 bzw. 6 als Einer, hat die Frage 2 · 6 = 12 mögliche Lösungen (denn 2 Zahlen kann man auf 2 Arten anordnen und 3 Zahlen kann man auf 3 · 2 · 1 = 6 Arten anordnen):

4 + 25 + 136 = 4 + 35 + 126 = 4 + 26 + 135 = 4 + 36 + 125

5 + 24 + 136 = 5 + 34 + 126 = 5 + 26 + 134 = 5 + 36 + 124

6 + 24 + 135 = 6 + 34 + 125 = 6 + 25 + 134 = 6 + 35 + 124 = 165

Analog gibt es ebenfalls sechs größt-mögliche Ausfüllungen:

1 + 42 + 653 = 1 + 52 + 643 = 1 + 43 + 652 = 1 + 53 + 642

2 + 43 + 651 = 2 + 53 + 641 = 2 + 41 + 653 = 2 + 51 + 643

3 + 41 + 652 = 3 + 51 + 642 = 3 + 42 + 651 = 3 + 52 + 641 = 696

(3) Betrachtet man irgendeine Summe, dann erhält man denselben Wert, wenn man die beiden Ziffern an den Zehnerstellen und die drei Ziffern an den Einerstellen vertauscht; hierfür gibt es 2 · 6 = 12 Möglichkeiten, vgl. (2).

(4) Zunächst muss man irgendwelche zwei Beispiele verschiedenen Typs finden, bei denen sich die Summe 300 ergibt.

Fangen wir mit der Summe der Einerziffern an: Diese muss 10 ergeben, damit die Einerziffer der Summe gleich null ist; und die Summe der Zehnerziffern muss dann gleich 9 sein, denn es kommt noch 1 als Übertrag von den Einerziffern hinzu. Damit ist aber klar, dass die Hunderterziffer gleich 2 sein muss, die dann vermehrt um die Summe der Zehnerziffern 3 ergibt.

Für die Einerziffern kommen entweder die Ziffern 1, 3, 6 oder die Ziffern 1, 4, 5 infrage, denn nur diese ergeben die Summe 10:

1 + 3 + 6 = 10 und 1 + 4 + 5 = 10

Für die Zehnerziffern bleiben dann entweder die Ziffern 4 und 5 (4 + 5 = 9) oder die Ziffern 3 und 6 (3 + 6 = 9), die dann jeweils auf 12 Arten vertauscht werden können, also insgesamt auf 24 Arten.

		1
	4	3
2	5	6
3	0	0

		1
	3	4
2	6	5
3	0	0

(5) Schauen wir uns ein erstes Beispiel an – wir kennen es von Aufgabe (2):

		4
	2	5
1	3	6
1	6	5

		3
	5	2
6	4	1
6	9	6

Links steht ein Beispiel für die kleinst-mögliche Summe, rechts ein Beispiel für die größt-mögliche Summe; die beiden Summen ergeben addiert 861.

Und noch die beiden Beispiele aus (4):

		1
	4	3
2	5	6
3	0	0

		6
	3	4
5	2	1
5	6	1

und

		1
	3	4
2	6	5
3	0	0

		6
	4	3
5	1	2
5	6	1

- **In allen drei Beispielen ergeben die beiden Summen zusammen jeweils 861.**

Ein allgemeiner Beweis kann durchgeführt werden, wenn das Rechnen mit Termen beherrscht wird (üblicherweise erst ab Klasse 7/8)

		a
	b	c
d	e	f
d	b+e	a+c+f

		7 – a
	7 – b	7 – c
7 – d	7 – e	7 – f
7 – d	14 – (b+e)	21 – (a+c+f)

Addiert man jetzt die beiden Summenterme, dann ergibt sich

d	b+e	21 – (a+c+f)
7 – d	14 – (b+e)	21 – (a+c+f)
7	14	21

d. h., die Einerziffer der Summe ist 1, die Zehnerziffer ergibt sich aus (14 + Übertrag 2) und dies ist 6, und die Hunderterziffer ergibt sich aus (7 + Übertrag 1) und dies ist 8.

(6) Man muss alle Möglichkeiten einzeln durchprobieren.
Wir zeigen dies an drei Beispielen:

Vertauscht man die Zehnerziffer Z = 1 mit der Einerziffer E = 4, dann wird die Zehnerziffer um 3 erhöht und die Einerziffer um 3 vermindert, die Summe der drei Zahlen des Schemas erhöht sich deshalb um 27 – das ist eine durch 9 teilbare Zahl.

Z \ E	1	2	3	4	5	6
1	–	+9	+18	+27	+36	+45
2	-9	–	+9	+18	+27	+36
3	-18	-9	–	+9	+18	+27
4	-27	-18	-9	–	+9	+18
5	-36	-27	-18	-9	–	+9
6	-45	-36	-27	-18	-9	–

Vertauscht man die Hunderterziffer H = 5 mit der Einerziffer E = 3, dann wird die Hunderterziffer um 2 vermindert und die Einerziffer und 2 erhöht, die Summe der drei Zahlen des Schemas vermindert sich deshalb um 198 – das ist eine durch 9 teilbare Zahl.

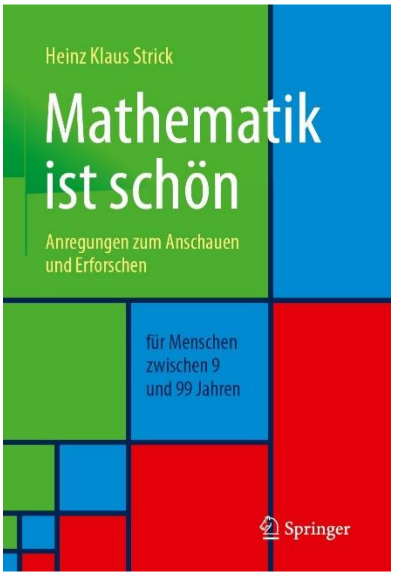
H \ E	1	2	3	4	5	6
1	–	+99	+198	+297	+396	+495
2	-99	–	+99	+198	+297	+396
3	-198	-99	–	+99	+198	+297
4	-297	-198	-99	–	+99	+198
5	-396	-297	-198	-99	–	+99
6	-495	-396	-297	-198	-99	–

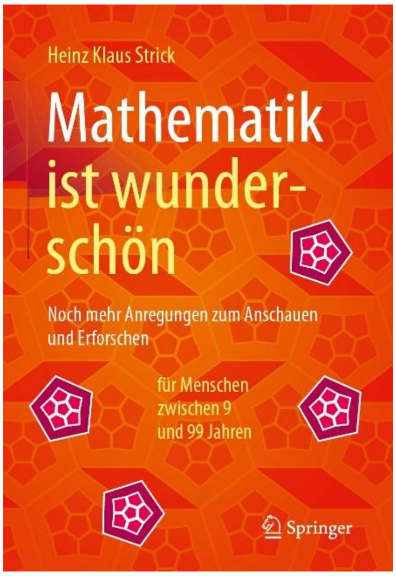
Vertauscht man die Hunderterziffer H = 2 mit der Zehnerziffer Z = 6, dann wird die Hunderterziffer um 4 erhöht und die Zehnerziffer um 4 vermindert, die Summe der drei Zahlen des Schemas erhöht sich deshalb um 360 – das ist eine durch 9 teilbare Zahl.

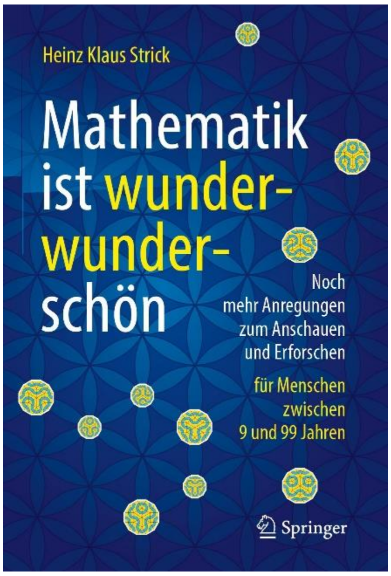
H \ Z	1	2	3	4	5	6
1	–	+90	+180	+270	+360	+450
2	-90	–	+90	+180	+270	+360
3	-180	-90	–	+90	+180	+270
4	-270	-180	-90	–	+90	+180
5	-360	-270	-180	-90	–	+90
6	-450	-360	-270	-180	-90	–

Hinweis auf meine drei Bücher über schöne Mathematik

- *Mathematik ist schön* (2017, 2. Auflage 2019)
- *Mathematik ist wunderschön* (2018, 2. Auflage 2020)
- *Mathematik ist wunderwunderschön*
  (2019, die 2. Auflage erscheint im Spätsommer 2021)







- Wenn diese Bücher über mich gekauft werden, geht jeweils 25 % des Verkaufspreises als Spende an das **Friedensdorf Oberhausen**.