Lösungen Dezember 2020

Ein Ziegenproblem

Wenn die Ziege an einem Eckpfahl angebunden wird, kann sie eine Fläche in Form eines Viertelkreises abgrasen. Gesucht ist also der Radius eines Kreises, bei dem ein Viertel der Fläche den Flächeninhalt 1 FE hat (wobei für die Seitenlänge *s* des Quadrats $s^2 = 2$ gilt).

$\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot s^2$, also $r^2 = \frac{2}{\pi} \cdot s^2$, d. h. $r = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot s \approx 0{,}798 \cdot s$

Erste Variation: $s^2 = 3$

$\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{3} \cdot s^2$, also $r^2 = \frac{4}{3\pi} \cdot s^2$, d. h. $r = \sqrt{\frac{4}{3\pi}} \cdot s \approx 0{,}651 \cdot s$

Zweite Variation: $s^2 = 4$

$\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{4} \cdot s^2$, also $r^2 = \frac{1}{\pi} \cdot s^2$, d. h. $r = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot s \approx 0{,}564 \cdot s$ für ersten beiden Seillängen.

Der rot eingezeichnete Viertelkreis verläuft – wie für den dritten Tag vorgeschlagen – durch den Mittelpunkt des Quadrats; der Radius ist also $|AC| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot s \approx 0{,}707 \cdot s$.

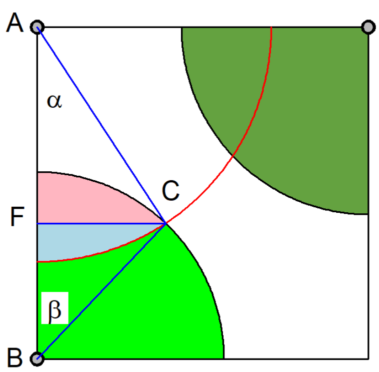
Die Strecke BC ist durch den Radius 0,564 · *s* bestimmt. Man kennt daher im Dreieck ABC die drei Seitenlängen und kann mithilfe des Kosinussatzes die Winkel bestimmen:

$$\cos(\alpha) \approx \frac{1^2 + 0{,}707^2 - 0{,}564^2}{2 \cdot 1 \cdot 0{,}707} \quad \text{mit } \alpha \approx 33{,}3° \text{ und}$$

$$\cos(\beta) \approx \frac{1^2 + 0{,}564^2 - 0{,}707^2}{2 \cdot 1 \cdot 0{,}564} \quad \text{mit } \beta \approx 43{,}5°.$$

Außerdem kann man noch folgende Streckenlängen bestimmen:

$|FC| = |AC| \cdot \sin(\alpha) \approx 0{,}388 \cdot s$, $|AF| = |AC| \cdot \cos(\alpha) \approx 0{,}591 \cdot s$, also $|BF| \approx 0{,}409 \cdot s$



Die blau gefärbte Fläche hat daher den Flächeninhalt

$$A_{blau} \approx \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi \cdot (0{,}707 \cdot s)^2 - \frac{1}{2} \cdot |AF| \cdot |FC| \approx 0{,}0307 \cdot s^2$$

und die rosa gefärbte Fläche

$$A_{rosa} \approx \frac{\beta}{360°} \cdot \pi \cdot (0{,}564 \cdot s)^2 - \frac{1}{2} \cdot |BF| \cdot |FC| \approx 0{,}0307 \cdot s^2 \approx 0{,}0414 \cdot s^2$$

Die innerhalb des rot gezeichneten Viertelkreises um A liegende, weiß gelassene Fläche hat daher den Flächeninhalt

$$A_{weiß} \approx \pi \cdot (0{,}707 \cdot s)^2 - 2 \cdot (0{,}0307 + 0{,}0414) \cdot s^2 \approx 0{,}2485 \cdot s^2 ,$$

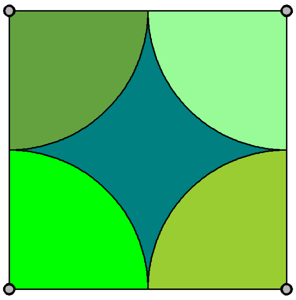
dies weicht nur um ca. 0,6 % von einem Viertel der Gesamtfläche ab.

Weitere Variation: s² = 5

Die quadratische Fläche hat den Flächeninhalt 5 FE, und die Ziege soll *fünf* Tage lang die Wiese mit gleich großen Flächen beweiden.

Wie ist die Länge des Seils *jeweils* zu wählen, das nacheinander an den vier Eckpfählen befestigt wird?

Ist die folgende dargestellte Lösung korrekt oder zumindest noch akzeptabel?



Die Flächeninhalte der hier vorgeschlagenen Viertelkreise betragen jeweils $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (\frac{1}{2} \cdot s)^2 = \frac{1}{16} \cdot \pi \cdot s^2 \approx 0{,}196 \cdot s^2$, das ist ca. 1,8 % weniger als ein Fünftel. Das wird die Ziege wohl kaum bemerken.

Insgesamt werden also an den ersten vier Tagen von der Ziege ca. 78,5 % des Grases aufgefressen, und für den fünften Tag bleibt noch ca. 21,5 % übrig; das ist ca. 7,3 % mehr als ein Fünftel der Gesamtfläche.

Also: Eine kleine Zugabe für den letzten Tag – die Ziege wird es freuen …