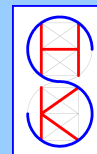




Lösungen Oktober 2020

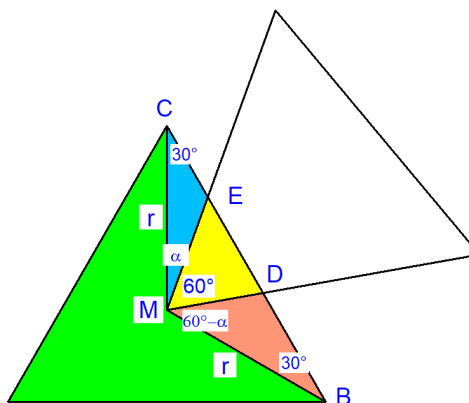


Drehende Dreiecke

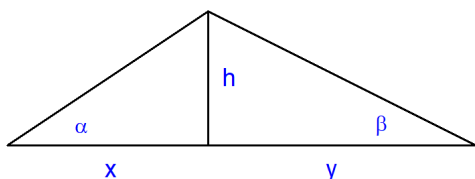
Aus der rechts stehenden Grafik kann man ablesen:

Der Flächeninhalt des gelb gefärbten Dreiecks MDE ergibt sich aus dem Flächeninhalt des Dreiecks MBC, vermindert um die Flächeninhalte der Dreiecke MEC (blau) und MBD (lachsfarben).

Von den Dreiecken MEC und MBD kennt man jeweils die Grundseite MC bzw. MB (= r = Radius des Umkreises des gleichseitigen Ausgangsdreiecks) sowie die an dieser Seite liegenden Winkel α und 30° bzw. 30° und $60^\circ - \alpha$.



Eine Flächeninhaltsformel für ein Dreieck, von dem man eine Seite $r = x + y$ und die beiden anliegenden Winkel α und β kennt, ergibt sich wie folgt:



$$\cot(\alpha) = \frac{x}{h}; \cot(\beta) = \frac{y}{h}, \text{ also}$$

$$r = x + y = h \cdot [\cot(\alpha) + \cot(\beta)] = h \cdot \left[\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} \right] = h \cdot \frac{\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)} = h \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}$$

$$\text{und hiermit: } A = \frac{1}{2} \cdot r \cdot h = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Somit ergibt sich wegen $r = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$ und $\sin(30^\circ) = 0,5$ für die Dreiecke MEC (blau) und MBD (lachsfarben):

$$A_{\text{blau}} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{\sin(\alpha) \cdot \sin(30^\circ)}{\sin(\alpha + 30^\circ)} = \frac{1}{12} \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha + 30^\circ)} \text{ und}$$

$$A_{\text{lachs}} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{\sin(60^\circ - \alpha) \cdot \sin(30^\circ)}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{1}{12} \cdot \frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks MBC ist ein Drittel des Flächeninhalts des Ausgangsdreiecks, also

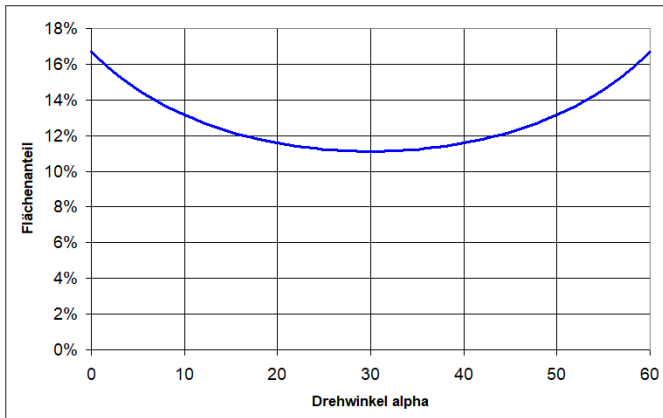
$$A = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \right) = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{3}.$$

Der gesuchte Flächenanteil $f(\alpha)$ des gelb gefärbten Dreiecks MDE am Ausgangsdreieck ist daher

$$\frac{\frac{1}{12} \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{12} \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha + 30^\circ)} - \frac{1}{12} \cdot \frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\cos(\alpha)}}{\frac{1}{4} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha + 30^\circ)} - \frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\cos(\alpha)}}{3 \cdot \sqrt{3}}, \text{ also}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot \sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha + 30^\circ)} + \frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\cos(\alpha)} \right)$$

Diese zu $\alpha = 30^\circ$ symmetrische Funktion hat für $\alpha = 0^\circ$ und $\alpha = 60^\circ$ jeweils den Funktionswert $\frac{1}{6}$ und für $\alpha = 30^\circ$ ihr Minimum mit dem Funktionswert $\frac{1}{9}$.



Für das um den Mittelpunkt des Ausgangsquadrats rotierende Quadrat gibt es eine erheblich einfachere Lösung:

Der Flächenanteil der gelb gefärbten Fläche ist konstant gleich einem Viertel der Fläche des Ausgangsquadrats, wie man leicht ablesen kann, wenn man die beiden innen liegenden Seiten des rotierenden Quadrats verlängert: Durch diese Geraden wird das Ausgangsquadrat in vier zueinander kongruente Vierecke zerlegt – wie auch immer das rotierende Quadrat gedreht wird.