Lösungen August 2020

Bei welcher Lage ist die Fläche maximal?

Im Folgenden soll jeweils das außen liegende *n*-Eck die Seitenlänge 1 LE haben.

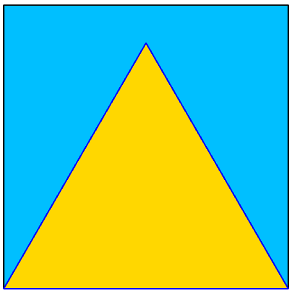
Regelmäßige *n*-Ecke haben jeweils *n* Symmetrieachsen:

- bei den Vielecken mit ungeradem *n* gibt es nur einen Typ: Die Symmetrieachsen verlaufen jeweils durch einen Eckpunkt, halbieren den zugehörigen Winkel und die gegenüberliegende Seite,
- bei den Vielecken mit geradem *n* gibt es zwei Typen: Die Symmetrieachsen verlaufen entweder durch einander gegenüberliegende Eckpunkte und halbieren die zugehörigen Winkel oder halbieren zwei einander gegenüberliegende Seiten .

„3 in 4"

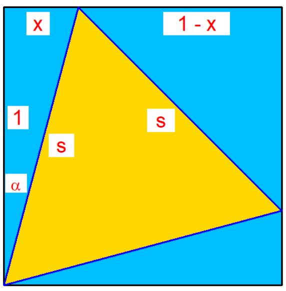
Da das regelmäßige Viereck zwei Typen von Symmetrieachsen hat und das regelmäßige Dreieck nur einen Typ, können hier zwei Fälle betrachtet werden:

- **eine Symmetrieachse des Dreiecks und eine Mittelparallele des Vierecks stimmen überein:**



gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 1: $A = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \approx 0{,}433$, Flächenanteil: ca. 43,3 %.

- **eine Symmetrieachse des Dreiecks und eine Diagonale des Vierecks stimmen überein:**



Nach dem Satz von Pythagoras gilt: $1^2 + x^2 = s^2$ und $(1-x)^2 + (1-x)^2 = s^2$

Gleichsetzen ergibt: $1 + x^2 = 2 - 4x + 2x^2$, also $x^2 - 4x = -1$ und weiter $(x-2)^2 = 3$.

Da für die Seitenlänge *x* gelten muss *x* < 1, ergibt sich: $x = 2 - \sqrt{3}$, also $s^2 = 1 + \left(2 - \sqrt{3}\right)^2 = 8 - 4 \cdot \sqrt{3}$

Für die Seitenlänge *s* des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks gilt daher

$s = \sqrt{8 - 4 \cdot \sqrt{3}} = 2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 1{,}035$. Der Flächeninhalt des Dreiecks ist dann:

$A_D = \frac{1}{4} \cdot s^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{4} \cdot (8 - 4 \cdot \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3} - 3 \approx 0{,}464$. Der Flächenanteil beträgt also ca. 46,4 %.

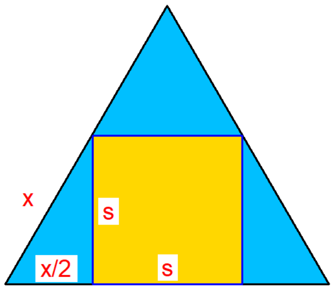
Alternative Bestimmung von s:

Aus der symmetrischen Figur ergibt sich unmittelbar, dass der spitze Winkel α eine Winkelgröße von 15° hat. Aus $\cos(15°) = \frac{1}{s}$ folgt: $s = \frac{1}{\cos(15°)} \approx 1{,}035$.

„4 in 3"

Da das regelmäßige Viereck zwei Typen von Symmetrieachsen hat und das regelmäßige Dreieck nur einen Typ, können hier zwei Fälle betrachtet werden:

– **eine Symmetrieachse des Dreiecks und eine Mittelparallele des Vierecks stimmen überein:**



Für die Grundseite des gleichseitigen Dreiecks gilt:

$\frac{1}{2} \cdot x + s + \frac{1}{2} \cdot x = 1$, also $x + s = 1$.

Wegen $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + s^2 = x^2$ gilt andererseits $s = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{3}$ (Höhe in einem halben gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge *x*), d. h. $x = \frac{2 \cdot s}{\sqrt{3}}$.

Hieraus folgt: $\frac{2 \cdot s}{\sqrt{3}} + s = 1$, also $s \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right) = 1$. Weiter ergibt sich: $s \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$, also

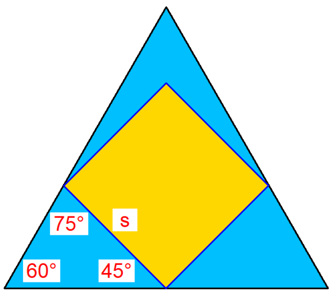
$s = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot (2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = 2 \cdot \sqrt{3} - 3 \approx 0{,}464$ und daher $A_Q = (2 \cdot \sqrt{3} - 3)^2 = 21 - 12 \cdot \sqrt{3} \approx 0{,}215$.

Im Vergleich zu $A_D = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \approx 0{,}433$ ergibt sich der Flächenanteil

$$\frac{A_Q}{A_D} = \frac{21 - 12 \cdot \sqrt{3}}{\frac{1}{4} \cdot \sqrt{3}} = \frac{84 - 48 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{84 \cdot \sqrt{3} - 48 \cdot 3}{3} = 28 \cdot \sqrt{3} - 48 \approx 0{,}497$$

Der Flächenanteil beträgt also ca. 49,7 %.

– **eine Symmetrieachse des Dreiecks und eine Diagonale des Vierecks stimmen überein:**



Vom Dreieck links unten sind die Winkel bekannt sowie die eine Seitenlänge 0,5. Mithilfe des Sinussatzes ergibt sich damit die Seitenlänge von *s*:

$$\frac{s}{\sin(60°)} = \frac{0{,}5}{\sin(75°)}, \text{ also } s = \frac{0{,}5 \cdot \sin(60°)}{\sin(75°)} \approx 0{,}448 \text{ und daher } A_Q \approx 0{,}448^2 \approx 0{,}201$$

Im Vergleich zu $A_D = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \approx 0{,}433$ ergibt sich als Flächenanteil $\frac{A_Q}{A_D} \approx 0{,}464$.

Der Flächenanteil beträgt also ca. 46,4 %.

Es fällt auf, dass dieser Flächenanteil genauso groß ist wie bei der zweiten Variante von „3 in 4".

Der rechnerische Nachweis, dass diese Flächenanteile nicht nur ungefähr gleich sind, ergibt sich aus folgender Umformung:

$$s = \frac{0{,}5 \cdot \sin(60°)}{\sin(75°)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos(15°)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6 - 3 \cdot \sqrt{3}}, \text{ also}$$

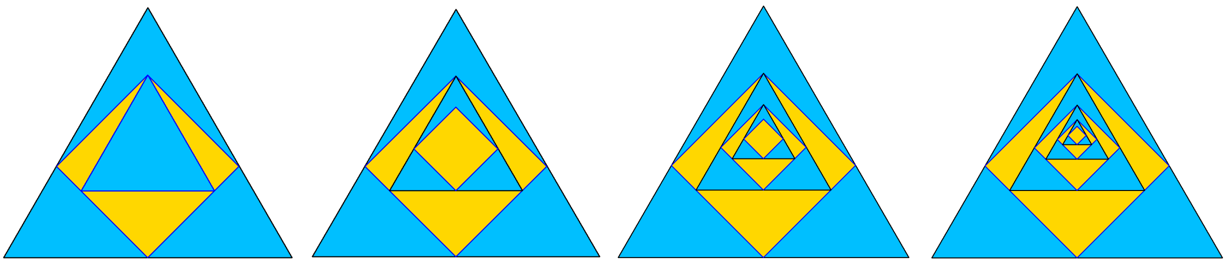
$$s^2 = \tfrac{3}{4} \cdot (2 - \sqrt{3}) \text{ und}$$

$$\frac{A_Q}{A_D} = \frac{\frac{3}{4} \cdot (2 - \sqrt{3})}{\frac{1}{4} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\frac{3}{4} \cdot (2 - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}}{\frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3} - 9}{3} = 2 \cdot \sqrt{3} - 3 \approx 0{,}464$$

Im Falle, dass eine Symmetrieachse des gleichseitigen Dreiecks und eine Diagonale des Quadrats aufeinanderliegen, ergibt sich also eine besondere Eigenschaft:

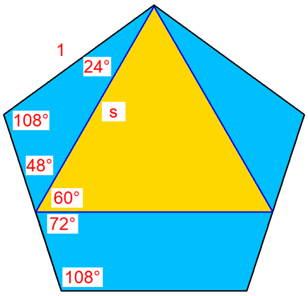
Man kann eine unendliche Folge von Dreiecken und Quadraten zeichnen, deren Flächen stets im gleichen Verhältnis 1 : 0,464 stehen.

- **Zusatzfrage: Welchen Farbanteil haben die blauen Teilflächen bei der unendlichen Folge, welchen die goldfarbenen Teilflächen?**



„3 in 5"

Da es bzgl. der Symmetrie sowohl beim regelmäßigen Dreieck als auch beim regelmäßigen Fünfeck nur einen Typ gibt, stimmen die beiden Symmetrieachsen überein. Dennoch können zwei Fälle betrachtet werden: Die auf der Symmetrieachse liegende Ecke des gleichseitigen Dreiecks kann auch Eckpunkt des regelmäßigen Fünfecks sein oder dieser Punkt liegt in der gegenüberliegenden Seitenmitte des Fünfecks.



Gemäß Sinussatz gilt für die Seitenlänge s die folgende Beziehung:

$\frac{s}{\sin(108°)} = \frac{1}{\sin(48°)}$, also $s = \frac{\sin(108°)}{\sin(48°)} \approx 1{,}280$. Hieraus folgt: $A_D \approx 0{,}709$.

Für den Flächeninhalt eines regelmäßigen Fünfecks mit Seitenlänge 1 gilt:

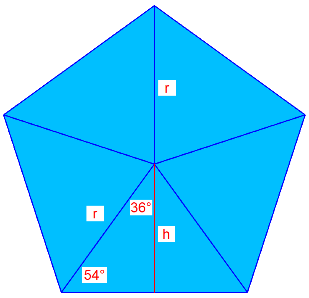
$A_{5E} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{0{,}5}{\tan(36°)} \approx 1{,}720$ (wobei wegen $\tan(36°) = \frac{0{,}5}{h}$ die Höhe *h* der fünf gleichschenkligen Dreiecke berechnet werden kann, die zusammen das Fünfeck ergeben).

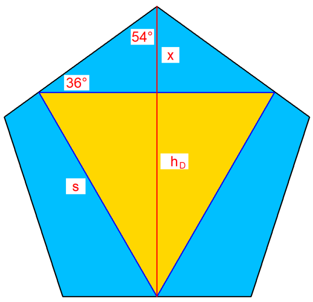
Für den Flächenanteil gilt: $\frac{A_D}{A_{5E}} \approx 0{,}412$.

Für die „Höhe" $H = h + r$ eines regelmäßigen Fünfecks mit Seitenlänge 1 gilt:

$\sin(36°) = \frac{0{,}5}{r}$ und $\tan(36°) = \frac{0{,}5}{h}$, vgl. Abb. links, also $H = \frac{0{,}5}{\sin(36°)} + \frac{0{,}5}{\tan(36°)}$.

Andererseits ist $H = h_D + x$, wobei $h_D = \frac{1}{2} \cdot s \cdot \sqrt{3}$ und $\tan(36°) = \frac{x}{\frac{1}{2} \cdot s}$, vgl. Abb. rechts.





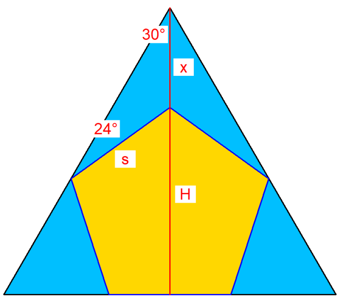
Daher gilt: $\frac{0{,}5}{\sin(36°)} + \frac{0{,}5}{\tan(36°)} = \frac{1}{2} \cdot s \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot s \cdot \tan(36°)$, somit $1{,}539 = 1{,}229 \cdot s$.

Hieraus folgt $s \approx \frac{1{,}229}{1{,}539} \approx 1{,}252$ und $A_D \approx 0{,}6785$ FE und daher als Flächenanteil $\frac{A_D}{A_{5E}} \approx 0{,}394$.

Die erste der beiden Möglichkeiten enthält also das größere gleichseitige Dreieck.

„5 in 3"

Auch hier müssen die beiden Möglichkeiten untersucht werden, bei denen die Spitze des Fünfecks nach oben bzw. nach unten weist.



Für die Höhe *h* im gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge 1 gilt: $h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$

Diese Höhe setzt sich hier zusammen aus $H = \left(\frac{0{,}5}{\sin(36°)} + \frac{0{,}5}{\tan(36°)}\right) \cdot s$

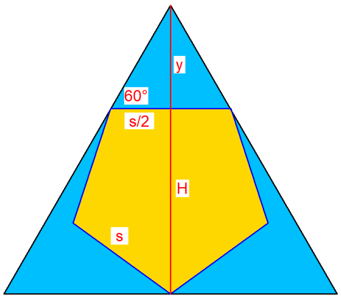
und dem Abschnitt *x* (vgl. Abb.).

Für *x* gilt gemäß Sinussatz: $\frac{s}{\sin(30°)} = \frac{x}{\sin(24°)}$

Somit gilt: $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \left(\frac{0{,}5}{\sin(36°)} + \frac{0{,}5}{\tan(36°)} \right) \cdot s + \frac{\sin(24°)}{\sin(30°)} \cdot s$, also $0{,}866 \approx 2{,}352 \cdot s$, d. h.,

$s \approx 0{,}368$ und weiter $A_{5E} \approx 1{,}720 \cdot s^2 \approx 0{,}233$.

Der Anteil der Fläche ist $\frac{A_{5E}}{A_D} \approx \frac{0{,}233}{0{,}433} \approx 0{,}539$.



Im zweiten Fall gilt: $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \left(\frac{0{,}5}{\sin(36°)} + \frac{0{,}5}{\tan(36°)} \right) \cdot s + y$,

wobei $y = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot s$ (= Höhe im oberen gleihseitigen Dreieck).

$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \left(\frac{0{,}5}{\sin(36°)} + \frac{0{,}5}{\tan(36°)} \right) \cdot s + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot s$ ergibt sich $0{,}866 \approx 2{,}4049 \cdot s$, also

$s \approx 0{,}360$ und weiter $A_{5E} \approx 1{,}720 \cdot s^2 \approx 0{,}223$.

Der Anteil der Fläche ist $\frac{A_{5E}}{A_D} \approx \frac{0{,}223}{0{,}433} \approx 0{,}515$.

Die erste der beiden Möglichkeiten enthält also das größere regelmäßige Fünfeck.

„4 in 5"

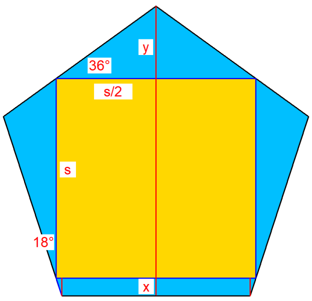
Da das regelmäßige Viereck zwei Typen von Symmetrieachsen hat und das regelmäßige Fünfeck nur einen Typ, können hier zwei Fälle betrachtet werden:

– **eine Symmetrieachse des Fünfecks und eine Mittelparallele des Vierecks stimmen überein:**

Für die „Höhe" H eines regelmäßigen Fünfecks mit Seitenlänge 1 gilt: $H = \frac{0{,}5}{\sin(36°)} + \frac{0{,}5}{\tan(36°)}$.

Diese Höhe setzt sich aus drei Abschnitten zusammen: $H = x + s + y$, wobei gilt:

$\tan(36°) = \frac{y}{0{,}5 \cdot s}$, also $y = \frac{1}{2} \cdot s \cdot \tan(36°)$.



Unterhalb des Quadrats liegt ein symmetrisches Trapez, dessen Grundlinien die Seitenlängen 1 bzw. s haben. Die beiden rechts und links im Trapez liegenden kleinen rechtwinkligen Dreiecke haben Katheten der Länge x und $\frac{1}{2}\cdot(s-1)$, wobei $\tan(18°) = \frac{\frac{1}{2}\cdot(s-1)}{x}$, also $x = \frac{\frac{1}{2}\cdot(s-1)}{\tan(18°)} = \frac{s}{2\cdot\tan(18°)} - \frac{1}{2\cdot\tan(18°)}$.

Somit ergibt sich die Beziehung:

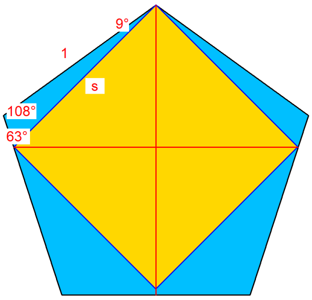
$$\frac{0{,}5}{\sin(36°)} + \frac{0{,}5}{\tan(36°)} = \tfrac{1}{2}\cdot s\cdot\tan(36°) + s + \frac{s}{2\cdot\tan(18°)} - \frac{1}{2\cdot\tan(18°)}$$

Aufgelöst nach *s* ergibt sich: $s \approx \frac{3{,}0777}{2{,}9021} \approx 1{,}060$, also $A_Q \approx 1{,}1247$

Für den Flächeninhalt eines regelmäßigen Fünfecks mit Seitenlänge 1 gilt:

$A_{5E} = 5\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{0{,}5}{\tan(36°)} \approx 1{,}720$. Für den Flächenanteil ergibt sich: $\frac{A_Q}{A_{5E}} \approx 0{,}654$.

– **eine Symmetrieachse des Fünfecks und eine Diagonale des Vierecks stimmen überein:**



Aus der Figur ergibt sich gemäß dem Sinussatz:

$$\frac{s}{\sin(108°)} = \frac{1}{\sin(63°)}\text{, also } s = \frac{\sin(108°)}{\sin(63°)} \approx 1{,}0674\text{, daher } A_Q \approx 1{,}139\,.$$

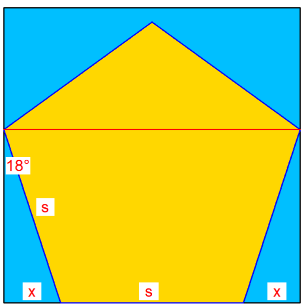
Für den Flächenanteil ergibt sich: $\frac{A_Q}{A_{5E}} \approx 0{,}662$.

Die zweite der beiden Möglichkeiten enthält also das größere Quadrat.

„5 in 4"

Da das regelmäßige Viereck zwei Typen von Symmetrieachsen hat und das regelmäßige Fünfeck nur einen Typ, können hier zwei Fälle betrachtet werden:

– **eine Symmetrieachse des Fünfecks und eine Mittelparallele des Vierecks stimmen überein:**



Für eine Diagonale *d* im regelmäßigen Fünfeck mit Seitenlänge *s* gilt:

$d = \Phi\cdot s$, wobei $\Phi = \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{5}+1) \approx 1{,}618$ die goldene Zahl. Da hier $d = 1$, folgt also für die Seitenlänge *s*:
$s = \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 \approx 0{,}618$, also für den Flächeninhalt des regelmäßigen Fünfecks:

$A_{5E} \approx 1{,}720 \cdot s^2 \approx 0{,}657$. Der Flächenanteil des regelmäßigen Fünfecks am Quadrat beträgt also ca. 65,7 %.

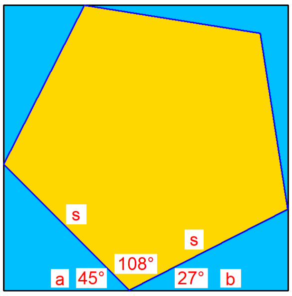
Ohne Kenntnis über die Länge der Diagonalen im regelmäßigen Fünfeck kann man auch so überlegen: $\sin(18°) = \frac{x}{s}$, also $x = s \cdot \sin(18°)$.

Dann folgt aus $x + s + x = 1$: $s \cdot \sin(18°) + s + s \cdot \sin(18°) = 1$, dass gilt: $s = \frac{1}{1 + 2 \cdot \sin(18°)} \approx 0{,}618$.

– **eine Symmetrieachse des Fünfecks und eine Diagonale des Vierecks stimmen überein:**

In den unten liegenden Dreiecken der folgenden Abb. gilt:

$\cos(45°) = \frac{a}{s}$ und $\cos(27°) = \frac{b}{s}$.



Dann folgt wegen $a + b = 1$, dass gilt: $s \cdot \cos(45°) + s \cdot \cos(27°) = 1$, und somit

$$s = \frac{1}{\cos(45°) + \cos(27°)} \approx 0{,}626,$$

also für den Flächeninhalt des regelmäßigen Fünfecks: $A_{5E} \approx 1{,}720 \cdot s^2 \approx 0{,}673$.

Der Flächenanteil des regelmäßigen Fünfecks am Quadrat beträgt also ca. 67,3 %.

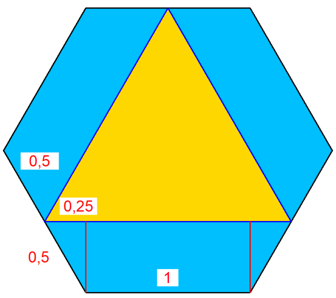
Die zweite der beiden Möglichkeiten enthält also das größere regelmäßige Fünfeck.

„3 in 6“

Da das regelmäßige Sechseck zwei Typen von Symmetrieachsen hat und das regelmäßige Dreieck nur einen Typ, können hier zwei Fälle betrachtet werden:

– **eine Symmetrieachse des Dreiecks und eine Mittellinie des Sechsecks stimmen überein:**

Aus der Abbildung ist zu entnehmen, dass die Seiten des einbeschriebenen Dreiecks 1,5-mal so lang sind wie die des umgebenenden regelmäßigen Sechsecks.

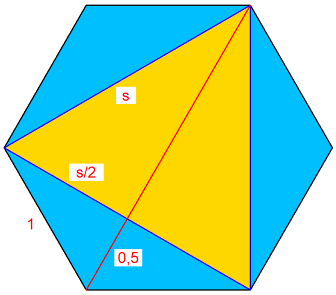


Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt daher $A_D = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot 1{,}5^2 \approx 0{,}974$, für den Flächeninhalt des regelmäßigen Sechsecks $A_{6E} = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot 1^2 \approx 2{,}598$.

Für den Flächenanteil ergibt sich: $\frac{A_D}{A_{6E}} = \frac{1{,}5^2}{6} = 0{,}375$.

– **eine Symmetrieachse des Dreiecks und eine Diagonale des Sechsecks stimmen überein:**

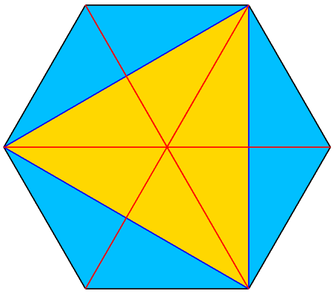
Aus der folgenden Abb. ergibt sich, dass die halbe Seitenlänge des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks so groß ist wie die Höhe in einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge 1 (siehe das rechtwinklige Dreieck mit Hypotenuse 1 und den Katheten der Länge 0,5 bzw. 0,5 · *s*): $s = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}\right) = \sqrt{3}$



Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt daher $A_D = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 \approx 1{,}299$.

Für den Flächenanteil ergibt sich: $\frac{A_D}{A_{6E}} = \frac{1{,}299}{2{,}598} = \frac{3}{6} = 0{,}5$.

Dieses Verhältnis kann man auch unmittelbar an der folgenden Abbildung ablesen:

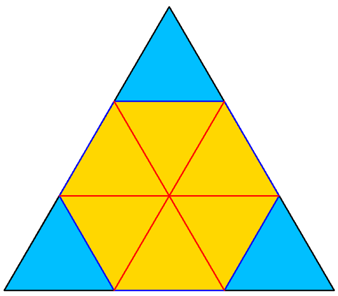


Die zweite der beiden Möglichkeiten enthält also das größere gleichseitige Dreieck.

– **eine Symmetrieachse des Dreiecks und eine Mittellinie des Sechsecks stimmen überein:**

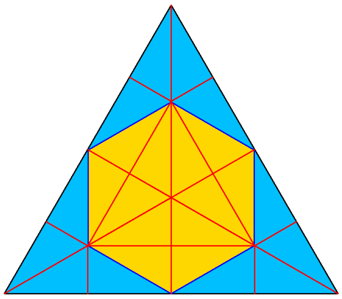
Aus der folgenden Abbildung kann man unmittelbar ablesen:

$\frac{A_{6E}}{A_D} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$



– **eine Symmetrieachse des Dreiecks und eine Diagonale des Sechsecks stimmen überein:**

Ergänzt man die Figur durch einige Hilfslinien, dann kann man an den zueinander kongruenten rechtwinkligen Dreiecken ablesen: $s = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \approx 0{,}289$ und $\frac{A_{6E}}{A_D} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} = 0{,}5$



„4 in 6“

Da das regelmäßige Sechseck und das regelmäßige Viereck jeweils zwei Typen von Symmetrieachsen haben, können hier sogar vier Fälle betrachtet werden:

– **eine Mittellinie des Vierecks und eine Mittellinie des Sechsecks stimmen überein:**

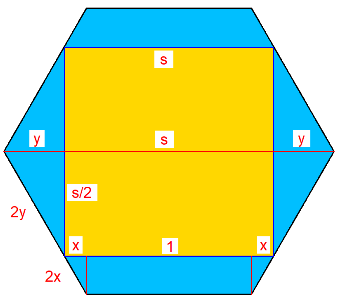
Aus der folgenden Abbildung kann man verschiedene Zusammenhänge ablesen, u. a.

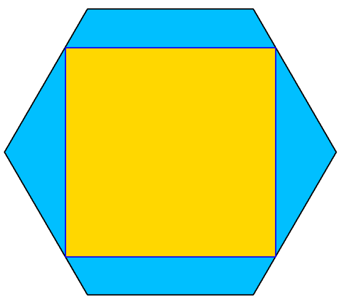
Aus $\frac{1}{2} \cdot s = y \cdot \sqrt{3}$ ergibt sich $2y = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot s = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot s$. Aus $x + 1 + x = s$ folgt $2x = s - 1$.

Schließlich ergibt sich dann aus $2x + 2y = 1$ die Beziehung $s - 1 + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot s = 1$, also

$s \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}\right) = 2$ und weiter $s = \dfrac{2}{1 + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{2 \cdot 3}{3 + \sqrt{3}} = \dfrac{6 \cdot (3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = 3 - \sqrt{3}$.

Der Flächeninhalt des Quadrats ist dann $A_Q = \left(3 - \sqrt{3}\right)^2 = 12 - 6 \cdot \sqrt{3} \approx 1{,}608$. Das regelmäßige Sechseck hat den Flächeninhalt $A_{6E} = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot 1^2 \approx 2{,}598$. Der Flächenanteil beträgt $\dfrac{A_Q}{A_{6E}} = \dfrac{1{,}608}{2{,}598} \approx 0{,}619$.





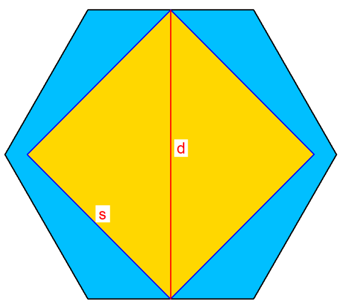
Aus der letzten Abbildung wird deutlich, dass hiermit auch der Fall

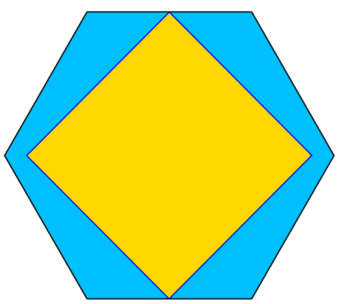
– **eine Mittellinie des Vierecks und eine Diagonale des Sechsecks stimmen überein**

erfasst ist.

– **eine Diagonale des Vierecks und eine Mittellinie des Sechsecks stimmen überein:**

Die Diagonale *d* des Quadrats ist auch „Höhe“ des Sechsecks; es gilt also:





$d = s \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}\right)$, also $s = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{1{,}5} \approx 1{,}225$, also $A_Q = 1{,}5$. Der Flächenanteil beträgt

$\dfrac{A_Q}{A_{6E}} = \dfrac{1{,}5}{2{,}598} \approx 0{,}577$.

Aus der letzten Abbildung wird deutlich, dass hiermit auch der Fall

– **eine Diagonale des Vierecks und eine Diagonale des Sechsecks stimmen überein**

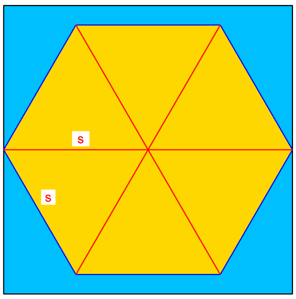
erfasst ist.

„4 in 6"

Da das regelmäßige Sechseck und das regelmäßige Viereck jeweils zwei Typen von Symmetrieachsen haben, können hier ebenfalls vier Fälle betrachtet werden:

– **eine Mittellinie des Vierecks und eine Mittellinie des Sechsecks stimmen überein:**

Offensichtlich gilt $2 \cdot s = 1$, also $s = \frac{1}{2}$. Hieraus ergibt sich $A_{6E} = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \approx 0{,}650$, d. h., der Flächenanteil beträgt $\dfrac{A_{6E}}{A_Q} = \dfrac{0{,}650}{1} \approx 0{,}650$.

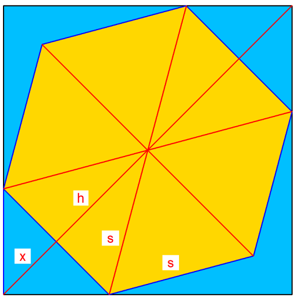


Aus der Abbildung wird deutlich, dass hiermit auch der Fall

– **eine Mittellinie des Vierecks und eine Diagonale des Sechsecks stimmen überein**

erfasst ist.

– **eine Diagonale des Vierecks und eine Mittellinie des Sechsecks stimmen überein:**



Für die Diagonale *d* des Quadrats gilt: $d = \sqrt{2} = 2x + 2h$, wobei $x = \frac{1}{2} \cdot s$ und $h = \frac{1}{2} \cdot s \cdot \sqrt{3}$, also $\sqrt{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot s + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot s \cdot \sqrt{3}$.

Hieraus ergibt sich: $s = \dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right) \cdot \left(\sqrt{3}-1\right)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) \approx 1{,}035$ und

$A_{6E} = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2 = \frac{3}{8} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(8 - 4 \cdot \sqrt{3}\right) = 3 \cdot \sqrt{3} - \frac{9}{2} \approx 0{,}696$, d. h., der Flächenanteil beträgt $\dfrac{A_{6E}}{A_Q} = \dfrac{0{,}696}{1} \approx 0{,}696$.

Aus der Abbildung wird deutlich, dass hiermit auch der Fall

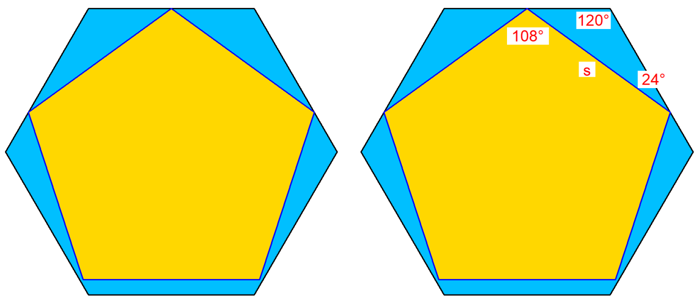
– **eine Diagonale des Vierecks und eine Diagonale des Sechsecks stimmen überein**

erfasst ist.

„5 in 6“

Da das regelmäßige Sechseck zwei Typen von Symmetrieachsen hat und das regelmäßige Fünfeck nur einen Typ, können hier zwei Fälle betrachtet werden:

– **eine Symmetrieachse des Fünfecks und eine Mittellinie des Sechsecks stimmen überein:**



Für die beiden Dreiecke oben kann man den Sinussatz anwenden:

$$\frac{s}{\sin(120°)} = \frac{0{,}5}{\sin(24°)}\text{, also } s = \frac{0{,}5 \cdot \sin(120°)}{\sin(24°)} \approx 1{,}0646\ .$$

Für den Flächeninhalt des regelmäßigen Fünfecks mit Seitenlänge *s* gilt dann:

$A_{5E} \approx 1{,}720 \cdot s^2 \approx 1{,}949$. Das regelmäßige Sechseck hat den Flächeninhalt $A_{6E} = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot 1^2 \approx 2{,}598$. Der Flächenanteil beträgt $\frac{A_{5E}}{A_{6E}} = \frac{1{,}949}{2{,}598} \approx 0{,}750$.

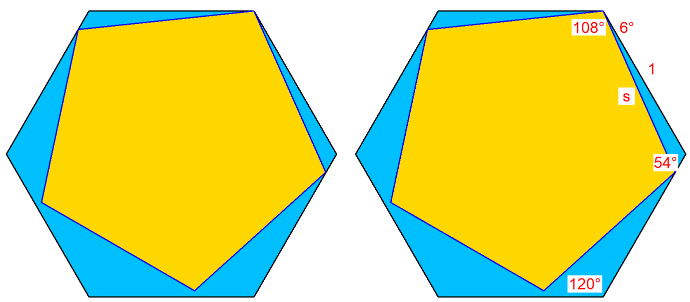
– **eine Symmetrieachse des Fünfecks und eine Diagonale des Sechsecks stimmen überein:**

Für das Dreieck rechts oben kann man den Sinussatz anwenden:

$$\frac{s}{\sin(120°)} = \frac{1}{\sin(54°)}\text{, also } s = \frac{\sin(120°)}{\sin(54°)} \approx 1{,}0705\ .$$

Für den Flächeninhalt des regelmäßigen Fünfecks mit Seitenlänge *s* gilt dann:

$A_{5E} \approx 1{,}720 \cdot s^2 \approx 1{,}971$. Der Flächenanteil beträgt $\frac{A_{5E}}{A_{6E}} = \frac{1{,}971}{2{,}598} \approx 0{,}759$.

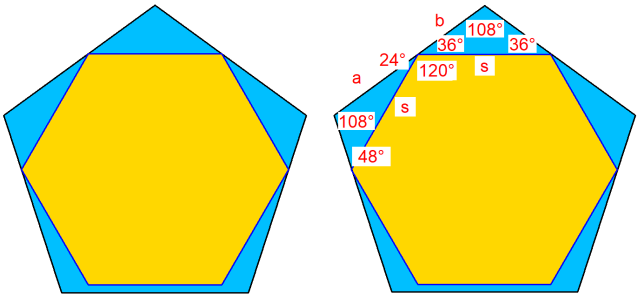


Die zweite der beiden Möglichkeiten enthält also das größere regelmäßige Fünfeck.

„6 in 5“

Da das regelmäßige Sechseck zwei Typen von Symmetrieachsen hat und das regelmäßige Fünfeck nur einen Typ, können hier zwei Fälle betrachtet werden:

– **eine Mittellinie des Sechsecks und eine Symmetrieachse des Fünfecks stimmen überein:**



Für die beiden Dreiecke links oben kann jeweils der Sinussatz angewendet werden:

$$\frac{s}{\sin(108°)} = \frac{a}{\sin(48°)}\text{, also } a = \frac{\sin(48°)}{\sin(108°)} \cdot s \text{ und } \frac{s}{\sin(108°)} = \frac{b}{\sin(36°)}\text{, also } b = \frac{\sin(36°)}{\sin(108°)} \cdot s\,.$$

Wegen $a + b = 1$ folgt $\frac{\sin(48°)}{\sin(108°)} \cdot s + \frac{\sin(36°)}{\sin(108°)} \cdot s = 1$, also $s = \frac{\sin(108°)}{\sin(48°) + \sin(36°)} \approx 0{,}715$.

Weiter gilt: $A_{6E} = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot s^2 \approx 1{,}327$ und $A_{5E} \approx 1{,}720$

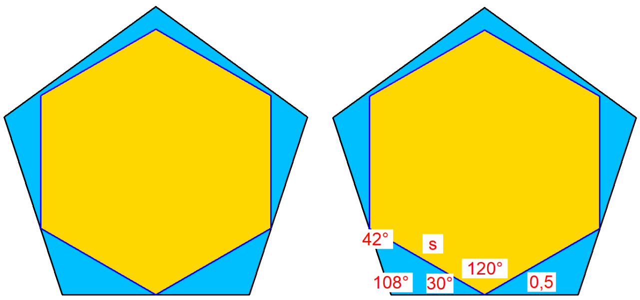
Der Flächenanteil beträgt $\frac{A_{6E}}{A_{5E}} = \frac{1{,}327}{1{,}720} \approx 0{,}771$.

– **eine Diagonale des Sechsecks und eine Symmetrieachse des Fünfecks stimmen überein:**

Im Dreieck links unten kann der Sinussatz angewendet werden:

$$\frac{s}{\sin(108°)} = \frac{0{,}5}{\sin(42°)}\text{, also } s = \frac{0{,}5 \cdot \sin(108°)}{\sin(42°)} \approx 0{,}7107$$

Also gilt: $A_{6E} = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot s^2 \approx 1{,}312$; der Flächenanteil beträgt $\frac{A_{6E}}{A_{5E}} = \frac{1{,}312}{1{,}720} \approx 0{,}763$.



Die erste der beiden Möglichkeiten enthält also das größere regelmäßige Sechseck.