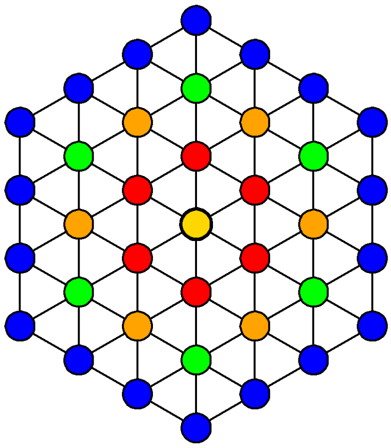
Lösungen Juli 2020

Ein Würfelspiel auf einem Dreiecksraster



Bei dem Spiel handelt es sich um eine MARKOW-Kette mit einem absorbierenden Zustand.

Bezeichnet man die aktuellen Positionen einer Spielfigur als Zustände, dann sind fünf Zustände zu unterscheiden:

Startfeld (gold) = Zustand 0 ,

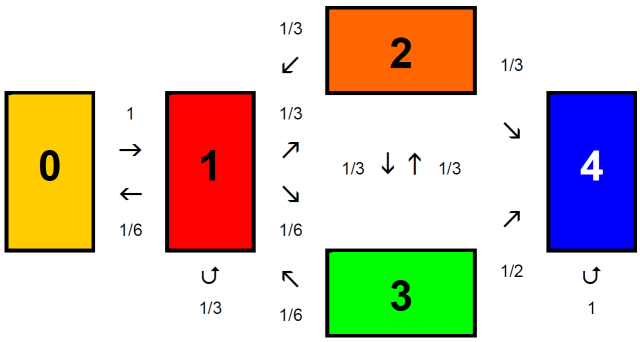
erster Sechseck-Ring um das Startfeld (rot) = Zustand 1,

mittlere Punkte des zweiten Sechseck-Rings um das Startfeld (orange) = Zustand 2,

Eckpunkte des zweiten Sechseck-Rings um das Startfeld (grün) = Zustand 3,

äußerer Sechseck-Ring (blau) = Zustand 4 = absorbierender Zustand.

Für die Übergänge gelten die folgenden Übergangs-Wahrscheinlichkeiten:



Für die zugehörige Übergangsmatrix M gilt also

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \text{; als Startvektor wählt man } \overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Startvektor $\overrightarrow{v_0}$ ergeben sich hieraus Schritt für Schritt die folgenden Wahrscheinlichkeiten für die Zustände 0, 1, 2, 3, 4:

n	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
2	0,1667	0,3333	0,3333	0,1667	0
3	0,0556	0,4167	0,1667	0,1667	0,1944
4	0,0694	0,2778	0,1944	0,1250	0,3333
5	0,0463	0,2477	0,1343	0,1111	0,4606
6	0,0413	0,1921	0,1196	0,0860	0,5610

n	0	1	2	3	4
7	0,0320	0,1595	0,0927	0,0719	0,6438
8	0,0266	0,1281	0,0771	0,0575	0,7107
9	0,0213	0,1046	0,0619	0,0471	0,7652
10	0,0174	0,0847	0,0505	0,0381	0,8093
11	0,0141	0,0688	0,0409	0,0310	0,8452
12	0,0115	0,0559	0,0333	0,0251	0,8743
13	0,0093	0,0454	0,0270	0,0204	0,8979
14	0,0076	0,0368	0,0219	0,0166	0,9171
15	0,0061	0,0299	0,0178	0,0134	0,9327
16	0,0050	0,0243	0,0144	0,0109	0,9454
17	0,0040	0,0197	0,0117	0,0089	0,9556
18	0,0033	0,0160	0,0095	0,0072	0,9640
19	0,0027	0,0130	0,0077	0,0058	0,9708
20	0,0022	0,0106	0,0063	0,0047	0,9763
…	…	…	…	…	…

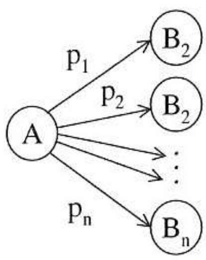
Aus der Differenz Δ der Wahrscheinlichkeiten für Zustand 4 erhält man durch Gewichtung mit der Anzahl *n* der Spielrunden (siehe folgende Tabelle) kumulierend ($\sum$) mit zunehmender Genauigkeit den Erwartungswert der Anzahl der Spielrunden. Dieser Prozess ist allerdings sehr langsam.

Man kann beweisen (s. u.), dass diese Folge gegen 7,3448… konvergiert, d. h., im Mittel dauert es etwas mehr als 7 Spielrunden, bis eine Spielfigur am Rand angekommen ist.

n	4	Δ	$n \cdot \Delta$	$\sum$
3	0,1944	0,1944	0,58333	0,58333
4	0,3333	0,1389	0,55556	1,13889
5	0,4606	0,1273	0,63657	1,77546
6	0,5610	0,1003	0,60185	2,37731
7	0,6438	0,0829	0,58018	2,95750
8	0,7107	0,0669	0,53481	3,49231
9	0,7652	0,0545	0,49015	3,98245
10	0,8093	0,0442	0,44151	4,42396
11	0,8452	0,0359	0,39461	4,81857
12	0,8743	0,0291	0,34939	5,16796
13	0,8979	0,0236	0,30738	5,47534
14	0,9171	0,0192	0,26874	5,74408
15	0,9327	0,0156	0,23379	5,97787
16	0,9454	0,0127	0,20247	6,18033
17	0,9556	0,0103	0,17466	6,35500
18	0,9640	0,0083	0,15015	6,50515
19	0,9708	0,0068	0,12869	6,63384
20	0,9763	0,0055	0,10998	6,74382

Diesen Erwartungswert kann man auch mithilfe der Mittelwertsregel für die Dauer einer MARKOW-Kette mit absorbierenden Zuständen berechnen (vgl. z. B. Leistungskurs Stochastik, Schroedel, 2003):

Von einem inneren Zustand A einer MARKOW-Kette aus kann man die unmittelbar benachbarten Zustände B_1, B_2, ..., B_n mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, ..., p_n erreichen. Dann gilt:



- Die mittlere Dauer a einer MARKOW-Kette vom Zustand A aus zu einem absorbierenden Zustand berechnet sich als gewichtetes Mittel aus der mittleren Dauer b_1, b_2, ..., b_n der MARKOW-Kette von den Nachbarzuständen aus:

  $a = p_1 \cdot (1 + b_1) + p_2 \cdot (1 + b_2) + \ldots + p_n \cdot (1 + b_n)$

  $\quad = 1 + (b_1 \cdot p_1 + b_2 \cdot p_2 + \ldots + b_n \cdot p_n)$

Wir bezeichnen die mittlere Dauer, um zum absorbierenden Zustand 4 zu kommen

- vom Zustand 0 aus, mit a
- vom Zustand 1 aus, mit b
- vom Zustand 2 aus, mit c
- vom Zustand 3 aus, mit d.

Dann gilt:

$a = 1 + 1 \cdot b$

$b = 1 + \frac{1}{6} \cdot a + \frac{1}{3} \cdot b + \frac{1}{3} \cdot c + \frac{1}{6} \cdot d$

$c = 1 + \frac{1}{3} \cdot b + \frac{1}{3} \cdot d$

$d = 1 + \frac{1}{6} \cdot b + \frac{1}{3} \cdot c$

Dieses lineare Gleichungssystem hat die Lösungen

$a \approx 7{,}34483$ (sowie $b \approx 6{,}34483$, $c \approx 4{,}27587$, $d \approx 3{,}48276$), vgl. Kommentar zur Lösung mit einer Tabellenkalkulation.