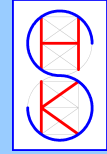




# Lösungen Februar 2020



## Kreise im Kreis im Kreis ...

Die Ausgangsfigur ist ein blau gefärbter Kreis mit Radius  $r_0 = 1$  (LE), Umfang  $u_0 = 2\pi$  (LE) und Flächeninhalt  $A_0 = \pi$  (FE).

### 1. Figur

In den Ausgangskreis werden sieben weiß gefärbte Kreise mit Radius  $r_1 = \frac{1}{3}$  eingezeichnet.

Der Umfang dieser sieben Kreise beträgt  $u_1 = 7 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3}$ . Die Gesamtlänge der Kreisumfänge ist  $u_0 + u_1 = 2\pi \cdot \left(1 + \frac{7}{3}\right)$ .

Der Flächeninhalt dieser sieben Kreise beträgt  $A_1 = 7 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$ . Der Anteil der weiß gefärbten Fläche beträgt  $\rho_1 = \frac{7}{9} \approx 77,8\%$ .

### 2. Figur

Die sieben Kreise mit Radius  $r_1 = \frac{1}{3}$  werden zunächst blau gefärbt, dann werden in jeden dieser sieben Kreise jeweils sieben weiß gefärbte Kreise mit Radius  $r_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$  eingezeichnet.

Der Umfang dieser  $7 \cdot 7 = 49$  weißen Kreise beträgt  $u_2 = 7^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{9}$ . Die Gesamtlänge der Kreisumfänge ist  $u_0 + u_1 + u_2 = 2\pi \cdot \left(1 + \frac{7}{3} + \left(\frac{7}{3}\right)^2\right)$ . Der Flächeninhalt dieser 49 Kreise beträgt  $A_2 = 7^2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 = 7^2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2$ . Der Anteil der weiß gefärbten Fläche beträgt  $\rho_2 = \left(\frac{7}{9}\right)^2 \approx 60,5\%$ .

### 3. Figur

Die 49 Kreise mit Radius  $r_1 = \frac{1}{9}$  werden zunächst blau gefärbt, dann werden in jeden dieser 49 Kreise jeweils sieben weiß gefärbte Kreise mit Radius  $r_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$  eingezeichnet.

Der Umfang dieser  $7^3 = 343$  weißen Kreise beträgt  $u_3 = 7^3 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{27}$ . Die Gesamtlänge der Kreisumfänge ist  $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 2\pi \cdot \left(1 + \frac{7}{3} + \left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^3\right)$ . Der Flächeninhalt dieser 343 Kreise beträgt  $A_3 = 7^3 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 = 7^3 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3$ . Der Anteil der weiß gefärbten Fläche beträgt  $\rho_3 = \left(\frac{7}{9}\right)^3 \approx 47,1\%$ .

### 4. Figur

Die die 343 Kreise mit Radius  $r_1 = \frac{1}{27}$  werden zunächst blau gefärbt, dann werden in jeden dieser 343 Kreise jeweils sieben weiß gefärbte Kreise mit Radius  $r_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^4$  eingezeichnet.

Der Umfang dieser  $7^4 = 2401$  weißen Kreise beträgt  $u_4 = 7^4 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{81}$ . Die Gesamtlänge der Kreisumfänge ist  $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 2\pi \cdot \left(1 + \frac{7}{3} + \left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^3 + \left(\frac{7}{3}\right)^4\right)$ . Der Flächeninhalt dieser 2401 Kreise beträgt  $A_4 = 7^4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4 = 7^4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4$ . Der Anteil der weiß gefärbten Fläche beträgt  $\rho_4 = \left(\frac{7}{9}\right)^4 \approx 36,6\%$ .

### Grenzverhalten

Bei Fortsetzung des Verfahrens wächst der Gesamtumfang über alle Grenzen hinaus (geometrische Reihe mit Wachstumsfaktor  $q = \frac{7}{3} > 1$ ), der Anteil des Flächeninhalts der weiß gefärbten Kreise geht wegen  $\rho_n = \left(\frac{7}{9}\right)^n$  gegen null.

Die Kreisfigur ist auch Thema in Kap. 3 von *Mathematik ist wunderwunderschön*.