Lösungen Februar 2020

Kreise im Kreis im Kreis …

Die Ausgangsfigur ist ein blau gefärbter Kreis mit Radius $r_0 = 1$ (LE), Umfang $u_0 = 2\pi$ (LE) und Flächeninhalt $A_0 = \pi$ (FE).

1. Figur

In den Ausgangskreis werden sieben weiß gefärbte Kreise mit Radius $r_1 = \frac{1}{3}$ eingezeichnet.

Der Umfang dieser sieben Kreise beträgt $u_1 = 7 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3}$. Die Gesamtlänge der Kreisumfänge ist $u_0 + u_1 = 2\pi \cdot \left(1 + \frac{7}{3}\right)$.

Der Flächeninhalt dieser sieben Kreise beträgt $A_1 = 7 \cdot \pi \cdot \frac{1}{9}$. Der Anteil der weiß gefärbten Fläche beträgt $p_1 = \frac{7}{9} \approx 77{,}8\%$.

2. Figur

Die sieben Kreise mit Radius $r_1 = \frac{1}{3}$ werden zunächst blau gefärbt, dann werden in jeden dieser sieben Kreise jeweils sieben weiß gefärbte Kreise mit Radius $r_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ eingezeichnet.

Der Umfang dieser 7 · 7 =49 weißen Kreise beträgt $u_2 = 7^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{9}$. Die Gesamtlänge der Kreisumfänge ist $u_0 + u_1 + u_2 = 2\pi \cdot \left(1 + \frac{7}{3} + \left(\frac{7}{3}\right)^2\right)$. Der Flächeninhalt dieser 49 Kreise beträgt $A_2 = 7^2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 = 7^2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2$. Der Anteil der weiß gefärbten Fläche beträgt $p_2 = \left(\frac{7}{9}\right)^2 \approx 60{,}5\%$.

3. Figur

Die 49 Kreise mit Radius $r_1 = \frac{1}{9}$ werden zunächst blau gefärbt, dann werden in jeden dieser 49 Kreise jeweils sieben weiß gefärbte Kreise mit Radius $r_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$ eingezeichnet.

Der Umfang dieser 7^3 = 343 weißen Kreise beträgt $u_2 = 7^3 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{27}$. Die Gesamtlänge der Kreisumfänge ist $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 2\pi \cdot \left(1 + \frac{7}{3} + \left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^3\right)$. Der Flächeninhalt dieser 343 Kreise beträgt $A_3 = 7^3 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 = 7^3 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6$. Der Anteil der weiß gefärbten Fläche beträgt $p_3 = \left(\frac{7}{9}\right)^3 \approx 47{,}1\%$.

4. Figur

Die die 343 Kreise mit Radius $r_1 = \frac{1}{27}$ werden zunächst blau gefärbt, dann werden in jeden dieser 343 Kreise jeweils sieben weiß gefärbte Kreise mit Radius $r_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^4$ eingezeichnet.

Der Umfang dieser 7^4 = 2401 weißen Kreise beträgt $u_2 = 7^4 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{81}$. Die Gesamtlänge der Kreisumfänge ist $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 2\pi \cdot \left(1 + \frac{7}{3} + \left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^3 + \left(\frac{7}{3}\right)^4\right)$. Der Flächeninhalt dieser 2401 Kreise beträgt $A_4 = 7^4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4 = 7^4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8$. Der Anteil der weiß gefärbten Fläche beträgt $p_4 = \left(\frac{7}{9}\right)^4 \approx 36{,}6\%$.

Grenzverhalten

Bei Fortsetzung des Verfahrens wächst der Gesamtumfang über alle Grenzen hinaus (geometrische Reihe mit Wachstumsfaktor $q = \frac{7}{3} > 1$), der Anteil des Flächeninhalts der weiß gefärbten Kreise geht wegen $p_n = \left(\frac{7}{9}\right)^n$ gegen null.

Die Kreisfigur ist auch Thema in Kap. 3 von *Mathematik ist wunderwunderschön*.

