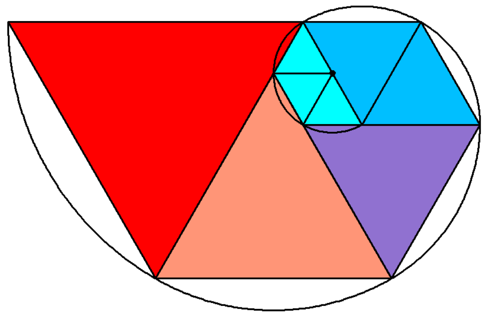
Lösungen März 2020

Spiralen um gleichseitige Dreiecke



An den ersten Schritten kann man die Konstruktionsprinzipien der Figur ablesen:

- Schritt 1

Drei gleichseitige Dreiecke mit Seitenlänge *s*, die einen gemeinsamen Eckpunkt haben (hervorgehoben), werden gezeichnet. Um diesen Punkt als Mittelpunkt wird ein Kreisbogen von 180° mit Radius *s* geschlagen; der Bogen hat die Länge $\frac{3}{6} \cdot (2\pi \cdot s) = \pi \cdot s$.

- Schritt 2

Vom Mittelpunkt des ersten Bogens aus bewegt man sich *eine* Seitenlänge *s* in entgegengesetzter Richtung zum zuletzt gezeichneten Bogenstück (nach unten) und zeichnet von diesem Punkt aus *zwei* aneinander liegende gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge 2*s* sowie einen Bogen von 120°. Das neue Bogenstück hat also die Länge $\frac{2}{6} \cdot (2\pi \cdot 2s) = \frac{4}{3}\pi \cdot s$

- Schritt 3

Vom Mittelpunkt des zweiten Bogens aus bewegt man sich *eine* Seitenlänge *s* in entgegengesetzter Richtung zum zuletzt gezeichneten Bogenstück (nach links) und zeichnet von diesem Punkt aus *ein* gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 3*s* sowie einen Bogen von 60°. Das neue Bogenstück hat also die Länge $\frac{1}{6} \cdot (2\pi \cdot 3s) = \pi \cdot s$

Die weiteren Schritte ergeben sich in ähnlicher Weise: Bewegung vom Mittelpunkt des zuletzt gezeichneten Bogenstücks aus in entgegengesetzter Richtung – zunächst um *eine* Seitenlänge, später um *mehr als eine* Seitenlänge bis zu einer Ecke der bisher gezeichneten Figur, dann Zeichnen eines gleichseitigen Dreiecks (mit wachsender Seitenlänge) und Zeichnen eines Kreisbogens von 60° mit einem Radius von dieser Seitenlänge.

Nachträglich erweist es sich als sinnvoll, den 1. Schritt als Abfolge von drei Einzelschritten darzustellen, den 2. Schritt als Abfolge von zwei Einzelschritten. Zur Vereinfachung wird *s* = 1 gewählt.

Somit erhält man:

Schritt Nr.	gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge	Färbung des Dreiecks	Quotient aufeinander folgender Glieder	Gesamtlänge des Bogens in Vielfachen von $\frac{1}{3} \cdot \pi$
1	1	hellblau		1
2	1	hellblau		2
3	1	hellblau		3
4	2	himmelblau		5
5	2	himmelblau		7

6	3	violett	$\frac{3}{2}=1{,}5$	10
7	4	rosa	$\frac{4}{3}=1{,}333...$	14
8	5	rot	$\frac{5}{4}=1{,}25$	19
9	7	gelb	$\frac{7}{5}=1{,}4$	26
10	9	grün	$\frac{9}{7}=1{,}28571...$	35
11	12	oliv	$\frac{12}{9}=1{,}333...$	47
12	16	dunkelgrün	$\frac{16}{12}=1{,}333...$	63
13	21	hellbraun	$\frac{21}{16}=1{,}3125$	84
14	28	braun	$\frac{28}{21}=1{,}333...$	112
15	37	dunkelbraun	$\frac{37}{28}=1{,}32142...$	149

Nachdem die ersten drei Dreiecke gezeichnet sind, ergeben sich die folgenden Dreiecke jeweils dadurch, dass an die längste Seite der entstandenen Figur ein gleichseitiges Dreieck angelegt wird, d. h.,

die Seitenlänge der hinzukommenden Dreiecke berechnet sich rekursiv:

$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$ für $n > 2$ aus den Startwerten $P_0 = P_1 = P_2 = 1$.

Aus der Grafik lässt sich auch die folgende Rekursionsvorschrift ablesen:

(Seitenlänge violett) = (Seitenlänge hellblau 1) + (Seitenlänge himmelblau 2)

(Seitenlänge rosa) = (Seitenlänge hellblau 2) + (Seitenlänge violett)

(Seitenlänge rot) = (Seitenlänge hellblau 3) + (Seitenlänge rosa) usw., also $P_n = P_{n-1} + P_{n-5}$

Den Beweis, dass beide Rekursionsformeln dieselbe Folge bestimmen, möge man selbst führen.

Bzgl. der Gesamtlänge der Spirale entdeckt man in der o. a. Tabelle (vielleicht) einen Zusammenhang:

... ; $\sum_{k=0}^{8} P_k = 19 = 21 - 2 = P_{13} - 2$; $\sum_{k=0}^{9} P_k = 26 = 28 - 2 = P_{14} - 2$; $\sum_{k=0}^{10} P_k = 35 = 37 - 2 = P_{15} - 2$; ...

also allgemein: $\sum_{k=0}^{n} P_k = P_{n+5} - 2$

In der Fachliteratur wird diese Folge als **PADOVAN-Folge** bezeichnet, nach dem britischen Architekten RICHARD PADOVAN, der diese in den Schriften des niederländischen Architekten HANS VAN DER LAAN entdeckt hatte. Einer größeren Öffentlichkeit wurde sie bekannt durch IAN STEWARTS Beitrag im *Scientific American* im Juni 1996 (und später in IAN STEWARTS Buch *Math Hysteria – Fun and Games with Mathematics*, Oxford University Press 2004, deutsche Fassung: *Die wunderbare Welt der Mathematik*, Piper 2006).

Im Wikipedia-Artikel in englischer Sprache

- https://en.wikipedia.org/wiki/Padovan_sequence

findet man eine Fülle von Informationen mit Hinweisen auf interessante Eigenschaften, die weitere Untersuchungen herausfordern, wie beispielsweise: $\sum_{k=0}^{n} P_{3k} = P_{3n+2}$ oder $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k}{2^k} = \frac{12}{5}$,

über den Zusammenhang mit Binomialkoeffizienten und kombinatorischen Fragestellungen

oder über den Zusammenhang mit den Lösungen der kubischen Gleichung $x^3 - x - 1 = 0$, deren reelle Lösung die Zahl $\psi = 1{,}32471...$ ist, dabei gilt für die Quotientenfolge von aufeinanderfolgenden Gliedern der PADOVAN-Folge:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{P_n}{P_{n-1}}\right) = \psi$$

HANS VAN DER LAAN hatte bei seinen Untersuchungen über Kuben für die Zahl ψ den Begriff *plastische Zahl* eingeführt, der seitdem üblich ist.

Die PADOVAN-Folge ist auch Thema in Kap. 12 von *Mathematik ist wunderwunderschön*.