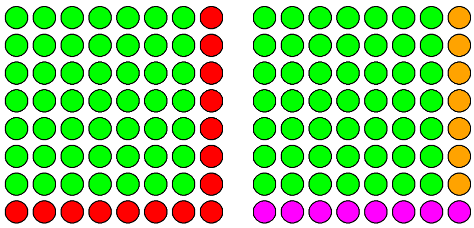
Blatt 72: Rechnen mit Quadratzahlen

Beim Quadrieren im Kopf kann man verschiedene Rechentricks anwenden.

Kennt man das Quadrat n^2 einer natürlichen Zahl n, dann erhält man die nächste Quadratzahl $(n + 1)^2$, indem man zur Quadratzahl n^2 die Zahl n und deren Nachfolger $(n + 1)$ addiert:

$$(n + 1)^2 = n^2 + n + (n + 1)$$

Man kann dies wie folgt veranschaulichen: Die erste Quadratzahl lässt sich als Quadrat aus Punkten darstellen; dieses wird durch einen Winkelhaken zum nächst-größeren Quadrat erweitert. Hierzu muss man $2n$ + 1Punkte ergänzen; der Term $2n + 1$ lässt sich auch als $n + (n + 1)$ notieren, wie man aus den folgenden Abbildungen ablesen kann.



- **Erläutern Sie die Vorgehensweise bei der Berechnung der Quadrate der Zahlen zwischen 40 und 50. Ergänzen Sie die Berechnung der übrigen Quadratzahlen.**

40² = 1600	40	41	41² = 1600 + (40 + 41) = 1600 + 2 · 40,5 = 1600 + 81 = 1681
		42	42² = 1600 + (40 + 41) + (41 + 42) = 1600 + 4 · 41 = 1600 + 164 = 1764
		43	43² = 1600 + (40 + 41) + (41+ 42) + (42 + 43) = 1600 + 6 · 41,5 =1600 + 249 = 1849
…			

50² = 1600	50	49	49² = 2500 – (50 + 49) = 2500 – 2 · 49,5 = 2500 – 99 = 2401
		48	48² = 2500 – (50 + 49) – (49 + 48) = 2500 – 4 · 49 = 2500 – 196 = 2304
		47	47² = 2500 – (50 + 49) – (49 + 48) – (48 + 47) = 2500 – 6 · 48,5 = 2500 – 291 = 2209
…			

- **Welcher einfache Rechentrick gilt für die Quadrate von natürlichen Zahlen, deren letzte Ziffer 5 ist?**

n	n^2	Rechnung	n	n^2	Rechnung
5	25		55	3025	50 · 60 + 5²
15	225	10 · 20 + 5²	65	4225	60 · 70 + 5²
25	625	20 · 30 + 5²	75	5625	70 · 80 + 5²
35	1225	30 · 40 + 5²	85	7225	80 · 90 + 5²
45	2025	40 · 50 + 5²	95	9025	90 · 100 + 5²

- **Wie kann man diesen Trick nutzen, um 46², 47², 44², 43² zu berechnen?**

aus „Mathematik ist schön“, Kap. 7 (Springer 2019, 2. Auflage)