Korrekturen Kap. 4.2 Seite 94–95

Satz

Anteil $\frac{\varphi(n)}{n}$ der zu *n* teilerfremden natürlichen Zahlen

Für den Anteil $\frac{\varphi(n)}{n}$ der zu *n* teilerfremden natürlichen Zahlen aus der Menge $\{1, 2, 3, ..., n\}$ gilt:

$\frac{\varphi(n)}{n} = (1-\frac{1}{p_1}) \cdot (1-\frac{1}{p_2}) \cdot (1-\frac{1}{p_3}) \cdot ... \cdot (1-\frac{1}{p_k})$.

Hieraus folgt, dass

$\boxed{\frac{1}{2} \le \frac{\varphi(n)}{n} < 1}$ erfüllt ist für alle natürlichen Zahlen *n*, die genau *einen* Primteiler besitzen,

$\boxed{\frac{1}{3} \le \frac{\varphi(n)}{n} < 1}$ erfüllt ist für alle natürlichen Zahlen *n*, die genau *zwei* Primteiler besitzen,

$\boxed{\frac{4}{15} \le \frac{\varphi(n)}{n} < 1}$ erfüllt ist für alle natürlichen Zahlen *n*, die genau *drei* Primteiler besitzen

usw.

In Abb. 4.3 sind für die natürlichen Zahlen zwischen 2 und 50 (einschl.) jeweils die Anteile $\frac{\varphi(n)}{n}$ durch farbige Punkte markiert: Die grün gefärbten Punkte gehören zu natürlichen Zahlen mit genau *einem* Primteiler, die violett gefärbten Punkte gehören zu natürlichen Zahlen mit genau *zwei* Primteilern, die schwarz gefärbten Punkte gehören zu natürlichen Zahlen mit genau *drei* Primteilern.

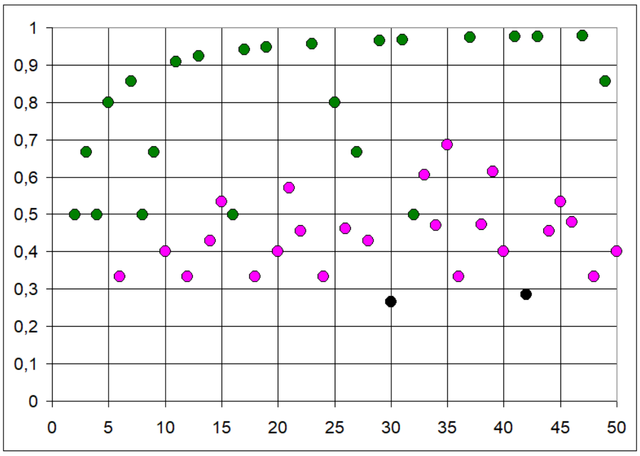

Abb. 4.3 Anteil $\frac{\varphi(n)}{n}$ der zu *n* teilerfremden Zahlen (neue Grafik)

Die Intervalle für $\frac{\varphi(n)}{n}$ ergeben sich wie folgt:

– Wenn *n* eine Primzahl oder eine Primzahlpotenz ist, dann gilt: $\frac{\varphi(n)}{n} = 1 - \frac{1}{n}$. $\frac{\varphi(n)}{n}$ ist also dann mindestens gleich $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

– Wenn *n* das Produkt zweier Primzahlen oder zweier Primzahlpotenzen ist, dann ist $\frac{\varphi(n)}{n}$ mindestens gleich dem Produkt der beiden kleinstmöglichen Brüche $\left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

– Entsprechend beträgt der Anteil $\frac{\varphi(n)}{n}$ bei drei Primfaktoren oder drei Primzahlpotenzen mindestens $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$.

–

Korrekturen Kap. 6.8 Seite 148–150

Eine weitere Eigenschaft entdeckte Pascal, als er „Rechtecke" aus zum Rand parallelen Feldern betrachtete: Die Summe der Binomialkoeffizienten in diesen Rechtecken ist um 1 kleiner als der Binomialkoeffizient, der in der nächsten zum Rand parallelen Reihe im nächsten Feld steht. Auch diese Eigenschaft wird leichter erkennbar, wenn das Dreieck in der Pascal'schen Original-Form notiert wird, vgl. Abb. 6.4.

Beispiel

Für die Zahlen im oliv unterlegten Rechteck gilt:

$$(1+1+1+1+1)+(1+2+3+4+5)+(1+3+6+10+15)+(1+4+10+20+35)$$
$$=5+15+35+70=125=126-1$$

1															
1	1														
1	2	1													
1	3	3	1												
1	4	6	4	1											
1	5	10	10	5	1										
1	6	15	20	15	6	1									
1	7	21	35	35	21	7	1								
1	8	28	56	70	56	28	8	1							
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1						
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1					
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1				
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1			
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1		
1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	
1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	55	78	91	105		
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455			
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365				
1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003					
1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005						
1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435							
1	9	45	165	495	1287	3003	6435								
1	10	55	220	715	2002	5005									
1	11	66	286	1001	3003										
1	12	78	364	1365											
1	13	91	455												
1	14	105													
1	15														
1															

Abb. 6.4 Rechtecke im Pascal'schen Dreieck (neue Grafiken)

Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

A 6.9: Notieren Sie allgemein die Beziehung für die Binomialkoeffizienten im grün unterlegten Rechteck.

Korrektur Kap. 9.1 S. 224

Die **Alhambra** befindet sich natürlich in Granada (und nicht in Cordoba).