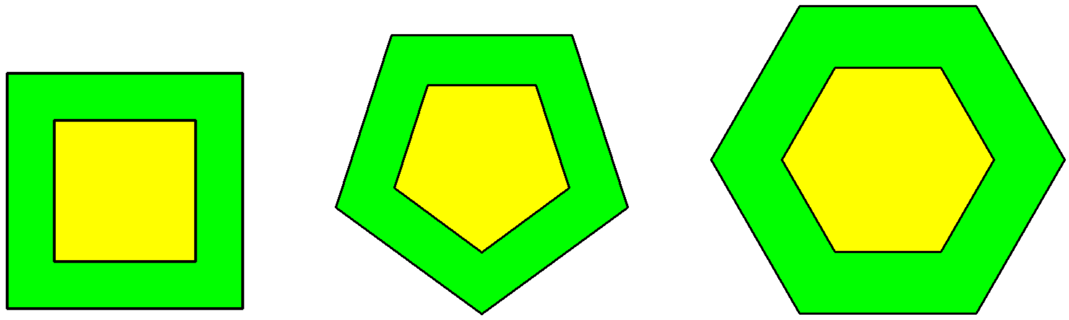
Problem des Monats August 2019

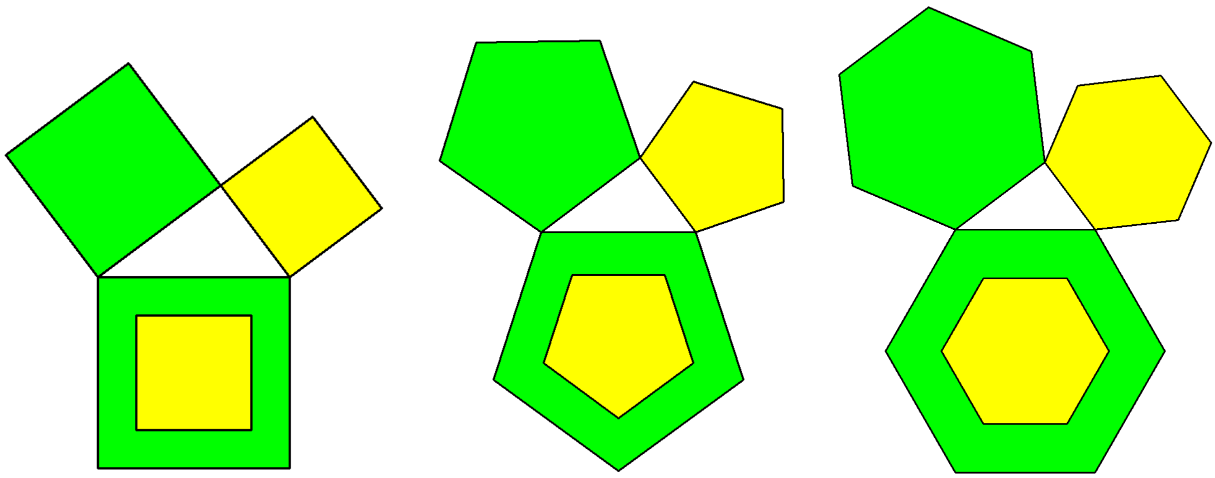
Polygon- und Kreis-Ringe



In einem regelmäßigen *n*-Eck wird konzentrisch ein kleineres regelmäßiges *n*-Eck eingezeichnet, sodass außen ein Polygon-Ring entsteht (hier jeweils grün gefärbt).

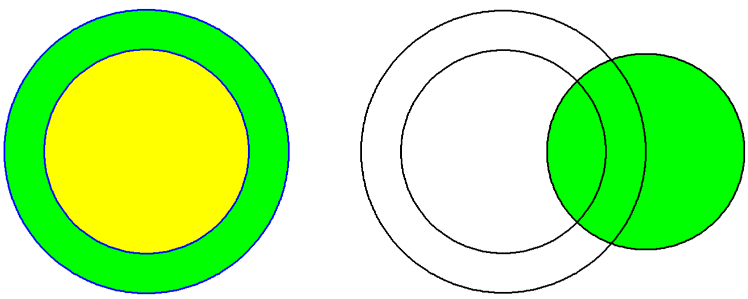
Die Abbildungen unten zeigen, wie man dann ein regelmäßiges *n*-Eck konstruieren kann, dessen Fläche genauso groß ist wie die des Polygon-Rings. So schön gelingt das allerdings nicht für beliebiges *n* …

- Für welche *n* sieht das nicht mehr so gut aus?



Auch die Konstruktion eines Kreises, dessen Fläche genauso groß ist wie der eines Kreisrings zwischen zwei konzentrischen Kreisen (wieder grün gefärbt), ist einfach.

- Nämlich wie?



© Heinz Klaus Strick Leverkusen 2019 – www.mathematik-ist-schoen.de

Lösung

Betrachten wir zunächst die Figur mit Quadraten. Gemäß dem Satz des Pythagoras sind die beiden Kathetenquadrate zusammen genauso groß wie das Hypotenusenquadrat. Wenn man also das gelb gefärbte Kathetenquadrat noch einmal symmetrisch in die Mitte des Hypotenusenquadrats zeichnet, dann hat die restliche Fläche des Hypotenusen-quadrats (grün gefärbt) automatisch dieselbe Flächengröße wie das grün gefärbte Kathetenquadrat.

Wenn man also einen Polynomring mit gewissen Seitenlängen und Ringbreite vorgibt, dann hat man

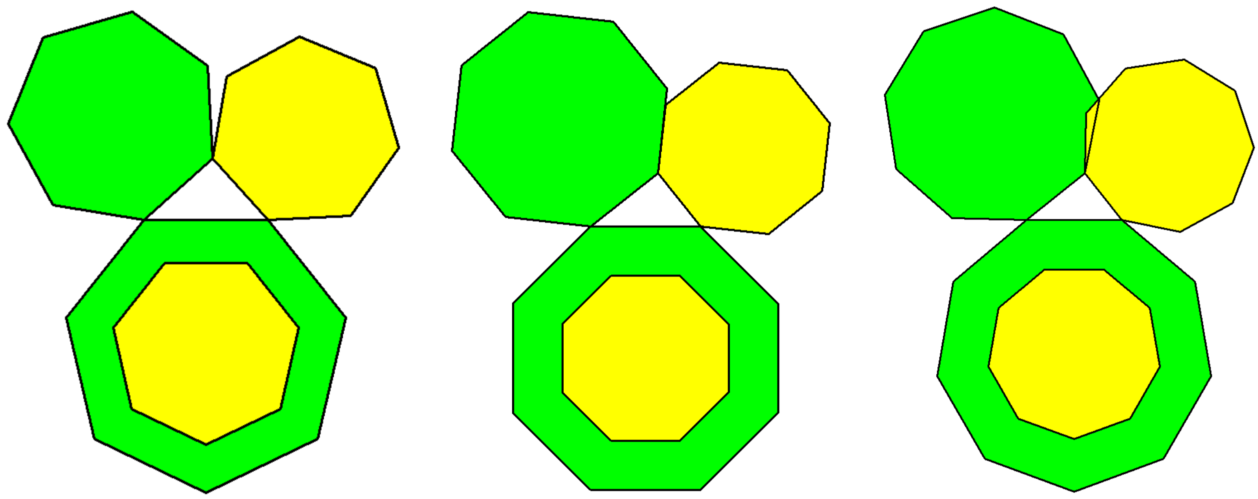
- mit der Seitenlänge der äußeren Ringbegrenzung die Seitenlänge der Hypotenuse

und

- mit der Seitenlänge der inneren Ringbegrenzung die Seitenlänge einer Kathete.

Zeichnet man über der Hypotenuse einen Thales-Halbkreis und zeichnet dann einen Kreis mit dem Radius der bekannten Kathete, dann ist damit das rechtwinklige Dreieck festgelegt, über dessen anderer Kathete ein Quadrat entsteht, das genauso groß ist wie der Quadratring.

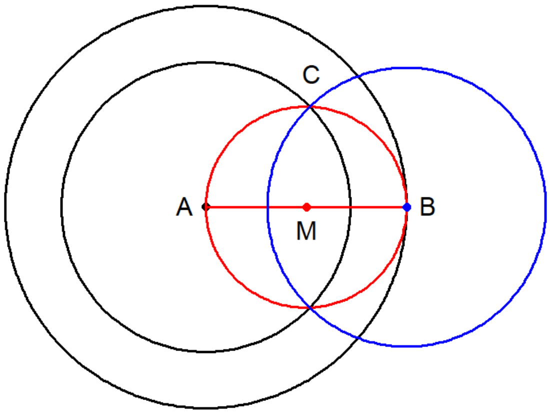
Da der Satz des Pythagoras nicht nur für Quadrate über den Seiten gilt, sondern für beliebige zueinander ähnliche Figuren, gilt eine entsprechende Konstruktion auch für die anderen *n*-Ecke, beispielsweise auch für $n = 7$ (links) und gerade noch für $n = 8$ (Mitte) usw., aber ab $n = 9$ sieht es nicht mehr gut aus …



Die Konstruktion eines Kreises, dessen Flächeninhalt so groß ist wie der des Kreisrings erfolgt entsprechend:

Vom Mittelpunkt der beiden konzentrischen Kreise aus, trägt man eine Strecke ab, die halb so groß ist wie der Radius des äußeren Kreises des Kreisrings (in der folgenden Zeichnung $|AM| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$. Um diesen Punkt M zeichnet man einen (Thales-)Kreis (in der Zeichnung rot); dieser schneidet den inneren Kreis des Kreisrings in Punkt C. Der Kreis um B mit Radius |BC| ist dann der gesuchte Kreis, denn $|AC|^2 + |CB|^2 = |AB|^2$.

© Heinz Klaus Strick Leverkusen 2019 – www.mathematik-ist-schoen.de


C
A
M
B