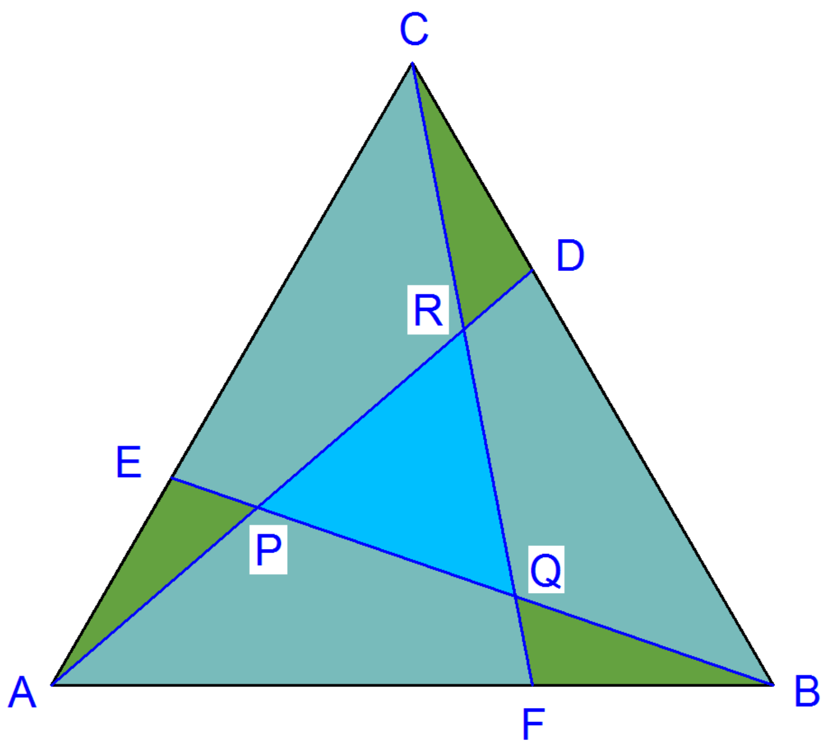
Problem des Monats Juli 2019

Besondere Flächenunterteilungen am Dreieck



Die Seiten AB, BC, CA eines (gleichseitigen) Dreiecks mit Seitenlänge 1 werden umlaufend durch die Punkte F, D, E im Verhältnis k : (1 – k) unterteilt (0,5 < k < 1).

Wenn man diese Teilungspunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten verbindet, entstehen im Innern des Dreiecks ABC

– ein gleichseitiges Dreieck PQR sowie
– drei zueinander kongruente Dreiecke (in der Abbildung oliv-grün gefärbt) und
– drei zueinander kongruente Vierecke (in der Abbildung blaugrau gefärbt).

- Welche Flächenanteile haben diese sieben Teilflächen an der Gesamtfläche?

- Geben Sie Beispiele für Parameterwerte *k* an, bei denen diese Flächenverhältnisse durch ein- oder zweistellige natürliche Zahlen ausgedrückt werden können.

Lösung

Mithilfe der Methoden der Vektorrechnung kann man die auftretenden Streckenlängen und damit die Teilungsverhältnisse ermitteln:

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + k \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + k \cdot \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = k \cdot \overrightarrow{AC} + (1-k) \cdot \overrightarrow{AB}$, also

$$\left|\overrightarrow{AD}\right|^2 = \left(k \cdot \overrightarrow{AC} + (1-k) \cdot \overrightarrow{AB}\right) * \left(k \cdot \overrightarrow{AC} + (1-k) \cdot \overrightarrow{AB}\right) = k^2 \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| + 2 \cdot k \cdot (1-k) \cdot \overrightarrow{AC} * \overrightarrow{AB} + (1-k)^2 \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

Wegen $\cos(60°) = \dfrac{\overrightarrow{AC} * \overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{1}{2}$, also $\overrightarrow{AC} * \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}$, folgt

$\left|\overrightarrow{AD}\right|^2 = k^2 + 2 \cdot k \cdot (1-k) \cdot \frac{1}{2} + (1-k)^2 = 1 - k + k^2$, also $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{1-k+k^2}$

Die beiden Geraden durch A, D und B, E schneiden sich im Punkt P:

$\vec{x}_{AD} = r \cdot \overrightarrow{AD} = r \cdot \left(k \cdot \overrightarrow{AC} + (1-k) \cdot \overrightarrow{AB}\right) = r \cdot (1-k) \cdot \overrightarrow{AB} + r \cdot k \cdot \overrightarrow{AC}$ und

$\vec{x}_{BE} = \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + s \cdot \left(\overrightarrow{BA} + (1-k) \cdot \overrightarrow{AC}\right) = (1-s) \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot (1-k) \cdot \overrightarrow{AC}$

Für den gemeinsamen Schnittpunkt P gilt daher:

$r \cdot (1-k) \cdot \overrightarrow{AB} + r \cdot k \cdot \overrightarrow{AC} = (1-s) \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot (1-k) \cdot \overrightarrow{AC}$, also:

$[r \cdot (1-k) - (1-s)] \cdot \overrightarrow{AB} = [s \cdot (1-k) - r \cdot k] \cdot \overrightarrow{AC}$.

Da die beiden Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ linear unabhängig voneinander sind, müssen die eckigen Klammer jeweils gleich null sein, d. h., es gilt also:

$r \cdot (1-k) = 1 - s$ und $s \cdot (1-k) = r \cdot k$.

Aus der zweiten Gleichung folgt $r = s \cdot \dfrac{1-k}{k}$; dies in die erste Gleichung eingesetzt, ergibt sich

$$s \cdot \frac{(1-k)^2}{k} = 1 - s \iff s \cdot \left(1 + \frac{(1-k)^2}{k}\right) = 1 \iff s \cdot \left(\frac{1-k+k^2}{k}\right) = 1 \iff s = \frac{k}{1-k+k^2}.$$

Hieraus folgt: $r = \dfrac{1-k}{1-k+k^2}$, d. h.

$\overrightarrow{AP} = \dfrac{1-k}{1-k+k^2} \cdot \overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{BP} = \dfrac{k}{1-k+k^2} \cdot \overrightarrow{BE}$.

Aus Symmetriegründen gelten entsprechende Eigenschaften auch für die anderen Transversalen, also beispielsweise $\overrightarrow{AR} = \dfrac{k}{1-k+k^2} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Hieraus ergibt sich dann $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AR} = \dfrac{2k-1}{1-k+k^2} \cdot \overrightarrow{AD}$, d. h.

$\left|\overrightarrow{PR}\right| = \dfrac{2k-1}{\sqrt{1-k+k^2}}$.

Der Anteil des (aus Symmetriegründen) gleichseitigen Dreiecks PQR am Gesamtdreieck ist also gleich

$$\frac{1-4k+4k^2}{1-k+k^2} = 4 - \frac{3}{1-k+k^2}.$$

Beispiele:

k	3/5 = 0,6	5/8 = 0,625	2/3 = 0,666…	5/7 = 0,714…	3/4 = 0,75	4/5 = 0,8
Anteil Dreieck PGR	1/19	4/49	1/7	3/13	4/13	3/7

Da in der restlichen Figur Winkel von 60° bzw. 120° auftreten, können auch die Flächeninhalte der anderen Teilflächen auf einfache Weise bestimmt werden:

$$\Delta ARC:\ \tfrac{1}{2}\cdot\left|AR\right|\cdot\left|RC\right|\cdot\sin(120°)=\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{\sqrt{1-k+k^2}}\cdot\frac{1-k}{\sqrt{1-k+k^2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{k\cdot(1-k)}{1-k+k^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Delta APE:\ \tfrac{1}{2}\cdot\left|AP\right|\cdot\left|PE\right|\cdot\sin(60°)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-k}{\sqrt{1-k+k^2}}\cdot\frac{(1-k)^2}{\sqrt{1-k+k^2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{(1-k)^3}{1-k+k^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Der Anteil einer olivgrün gefärbten Dreiecke an der Gesamtfläche beträgt also jeweils $\frac{(1-k)^3}{1-k+k^2}$.

Hieraus folgt: Der Anteil einer graublau gefärbten Fläche an der Gesamtfläche ist jeweils gleich

$$\frac{k\cdot(1-k)}{1-k+k^2}-\frac{(1-k)^3}{1-k+k^2}=\frac{k^3-4k^2+4k-1}{1-k+k^2}.$$

k	3/5 = 0,6	5/8 = 0,625	2/3 = 0,666…	5/7 = 0,714…	3/4 = 0,75	4/5 = 0,8
blau	1/19	4/49	1/7	3/13	4/13	3/7
oliv	8/95	27/392	1/21	8/273	1/52	1/105
grau	22/95	93/392	5/21	62/273	11/52	19/105
Verh.	5:8:22	32:27:93	3:1:5	63:8:62	12:1:11	45:1:19

Anmerkung: Für k = 0,5 schneiden sich die Transversalen in einem Punkt.