Blatt 18: Ägyptische Brüche

In der Mathematik der alten Ägypter war es üblich, Brüche als Summe von Stammbrüchen darzustellen, beispielsweise $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$.

Um eine solche Darstellung zu finden, kann man ein Verfahren anwenden, das Leonardo von Pisa (genannt Fibonacci) im Jahr 1202 veröffentlichte:

Fibonaccis Algorithmus zur Bestimmung eines ägyptischen Bruchs

Gegeben ist ein gekürzter Bruch $\frac{a}{b}$ mit $a < b$.

Schritt 1: Suche einen *möglichst großen* Stammbruch $\frac{1}{c}$, der kleiner ist als $\frac{a}{b}$.

Schritt 2: Bestimme die Differenz $\frac{d}{e} = \frac{a}{b} - \frac{1}{c}$

Wende – falls erforderlich – Schritt 1 und Schritt 2 solange auf den Bruch $\frac{d}{e}$ an, bis $d = 1$, d. h., bis $\frac{d}{e}$ ein Stammbruch ist.

Beispiel: $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{8}{10} - \frac{5}{10}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \left(\frac{6}{20} - \frac{5}{20}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$

- Bestimmen Sie mithilfe des Fibonacci-Algorithmus eine ägyptische Bruch-Darstellung

$\frac{3}{5} =$

$\frac{4}{7} =$

$\frac{5}{9} =$

$\frac{6}{11} =$

Auch Stammbrüche selbst lassen sich als Summe von anderen Stammbrüchen darstellen.

Beispielsweise findet man für den Bruch $\frac{1}{6}$ die folgenden vier Summendarstellungen aus lauter verschiedenen Stammbrüchen:

$\frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$; $\frac{1}{6} = \frac{1}{8} + \frac{4-3}{24} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24}$; $\frac{1}{6} = \frac{1}{9} + \frac{3-2}{18} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18}$; $\frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \frac{5-3}{30} = \frac{1}{10} + \frac{2}{30} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$.

- Bestimmen Sie jeweils alle Möglichkeiten, die Brüche $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$ und $\frac{1}{10}$ als ägyptische Brüche mit zwei Summanden darzustellen.