Blatt 14: Die Harmonische Reihe divergiert

Im Laufe der Jahrhunderte gab es verschiedene Ideen für den Beweis, dass die harmonische Reihe

$$H_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{n-1} + \tfrac{1}{n}$$

über alle Schranken hinaus wächst. Erläutern Sie die Überlegungen.

(1) Nicole Oresme (1330-1382)

$$H_4 = 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) > 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) = 2 = a_2$$

$$H_8 = 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) > 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) = 2{,}5 = a_3$$

$$H_{16} = 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{16}\right)$$
$$> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16}\right) = 3 = a_4$$

usw.

(2) Pietro Mengoli (1626-1686)

$$H = 1 + \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10}\right) + \ldots$$

Wegen $\tfrac{1}{a-1} + \tfrac{1}{a} + \tfrac{1}{a+1} > \tfrac{3}{a}$ (warum?) folgt:

$$H > 1 + \tfrac{3}{3} + \tfrac{3}{6} + \tfrac{3}{9} + \ldots = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots = 1 + H$$

(3)

$$H = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots = \tfrac{2}{2} + \tfrac{2}{4} + \tfrac{2}{6} + \tfrac{2}{8} + \tfrac{2}{10} + \ldots$$
$$= \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{10}\right) + \ldots$$
$$< \left(1 + \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6}\right) + \left(\tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10}\right) + \ldots = H$$

(4)

$$H = 1 + \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6}\right) + \left(\tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10}\right) + \left(\tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{15}\right) + \ldots$$
$$> 1 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{3}{6} + \tfrac{4}{10} + \tfrac{5}{15} + \ldots = \tfrac{2}{2} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{4} + \tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{6} + \ldots = 2 \cdot (H - 1)$$

(5)

$$H = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \ldots = 1 + \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{3} + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{1}{5} + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6}\right) + \tfrac{1}{7} + \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8}\right) + \ldots$$
$$= \left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \ldots\right) + \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots\right) = A + H$$

wobei $A = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \ldots = \ln(2) = 0{,}69314\ldots$

aus „Mathematik ist wunderschön“, Kap. 2 (Springer 2018)
© Heinz Klaus Strick – www.mathematik-ist-schoen.de