Satz von PICK auf einem Quadratgitter

In Kap. 11 von *Mathematik ist schön* ist eine einfache Möglichkeit beschrieben, wie man den Flächeninhalt von Vielecken berechnen werden kann, wenn die Koordinaten der Eckpunkte des Vielecks ganzzahlig sind, d. h., wenn sie Punkte eines Quadratgitters sind.

Der Entdecker dieses Satzes war GEORG ALEXANDER PICK (geboren 1859 in Wien, ermordet 1942 im KZ Theresienstadt), von 1888 bis 1927 Professor für Mathematik an der Universität Prag.

Flächeninhalt von Vielecken im Quadratgitter (Satz von PICK)

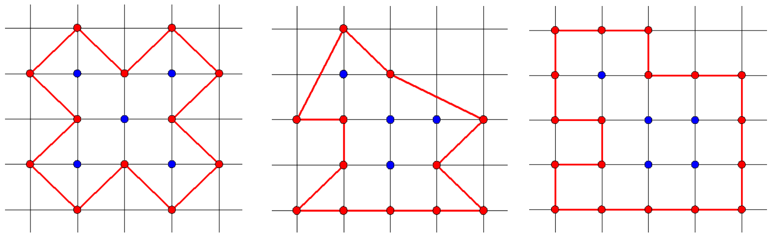
Sind die Eckpunkte eines Vielecks Punkte eines Quadratgitters, dann lässt sich der Flächeninhalt *A* des Vielecks berechnen aus der Anzahl *r* derjenigen Randpunkte, die Gitterpunkte sind, und der Anzahl *i* der innerhalb des Vielecks liegenden Gitterpunkte:

$$A = i + \tfrac{1}{2} \cdot r - 1$$

Dabei wird A in Vielfachen des Flächeninhalts eines Basis-Gitterqudrats gemessen.

Dieser Satz gilt für alle Vielecke, die keine Löcher enthalten.

Beispiele: r = 12, i = 5, $A = 5 + \tfrac{1}{2} \cdot 12 - 1 = 10$ (links), r = 12, i = 4, $A = 4 + \tfrac{1}{2} \cdot 12 - 1 = 9$ (Mitte), r = 18, i = 5, $A = 5 + \tfrac{1}{2} \cdot 18 - 1 = 13$ (rechts):



Statt eines Quadratgitters kann man auch andere Gitter wählen: Eine Parkettierung der Ebene ist ebenfalls möglich durch gleichseitige Dreiecke oder durch regelmäßige Sechsecke. Wie im Folgenden gezeigt wird, findet man auch hier entsprechende Gesetzmäßigkeiten.

Flächeninhalt von Vielecken im Dreieckgitter

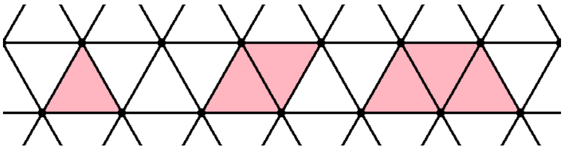
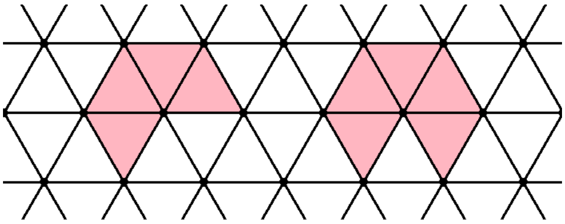
Sind die Eckpunkte eines Vielecks Punkte eines Dreieckgitters, dann lässt sich der Flächeninhalt *A* des Vielecks berechnen aus der Anzahl *r* derjenigen Randpunkte, die Gitterpunkte sind, und der Anzahl *i* der innerhalb des Vielecks liegenden Gitterpunkte:

$$A = 2 \cdot i + r - 2$$

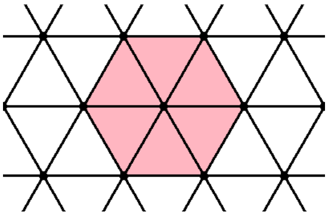
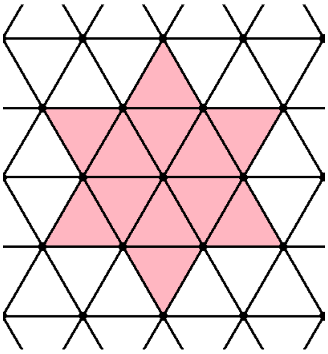
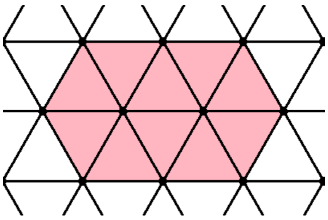
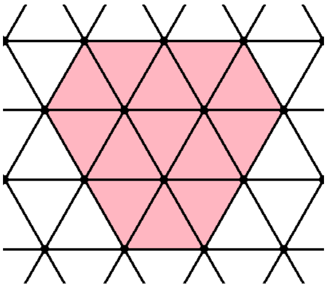
Dabei wird *A* in Vielfachen des Flächeninhalts eines Gitterdreiecks gemessen.

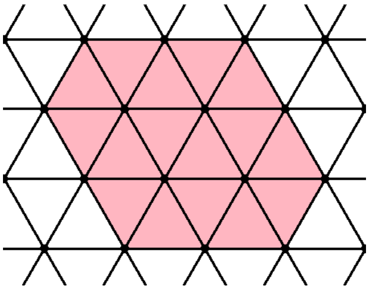
Um diese Regel zu entdecken, kann man die folgenden Beispiele anschauen:

Für den Ansatz $A = a \cdot i + b \cdot r - c$ kann man an den ersten drei Beispielen ablesen, dass der Koeffizient *b* gleich 1 sein muss (sofern eine solche Gesetzmäßigkeit besteht), und aus den Beispielen folgt auch, dass c = 2. Dies wird durch die nächsten beiden Beispiele bestätigt.

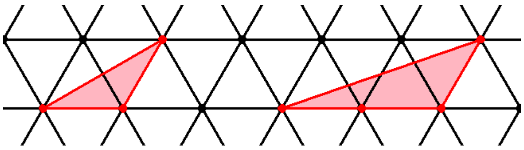
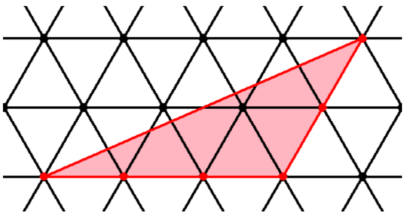
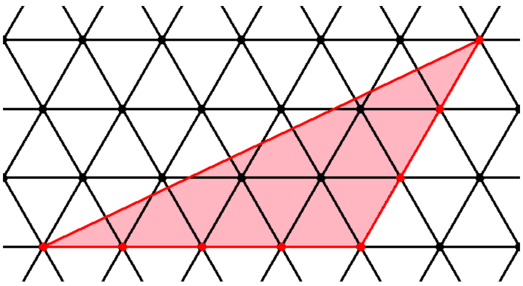
	$i = 0$ $r = 3$ ($r = 4$; $r = 5$) $A = a \cdot 0 + 1 \cdot 3 - 2 = 1$ ($A = 2$, $A = 3$)
	$i = 0$ $r = 6$ ($r = 7$) $A = a \cdot 0 + 1 \cdot 6 - 2 = 4$ ($A = 5$)

Aus den folgenden Beispielen kann man erschließen, dass der Koeffizient *a* gleich 2 sein muss.

	$i = 1$ $r = 6$ $A = 2 \cdot 1 + 6 - 2 = 6$
	$i = 1$ $r = 12$ $A = 2 \cdot 1 + 12 - 2 = 12$
	$i = 2$ $r = 8$ $A = 2 \cdot 2 + 8 - 2 = 10$
	$i = 3$ $r = 9$ $A = 2 \cdot 3 + 9 - 2 = 13$

	$i = 4$ $r = 10$ $A = 2 \cdot 4 + 10 - 2 = 16$

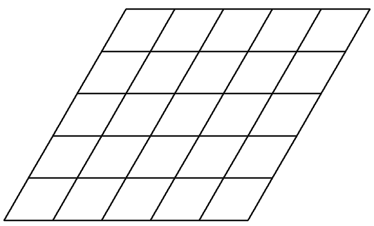
Während in den bisher betrachteten Beispielen alle Begrenzungslinien der Vielecke *auf* den Gitterlinien lagen, untersuchen wir im Folgenden auch Begrenzungslinien, bei denen Gitterpunkte miteinander verbunden werden, die *nicht* benachbart sind:

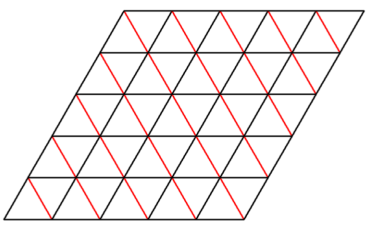
	$i = 0$ $r = 3$ ($r = 4$) $A = 2 \cdot 0 + 3 - 2 = 1$ ($A = 2$) (halbes Parallelogramm mit $A = 2$ bzw. $A = 4$)
	$i = 1$ $r = 6$ $A = 2 \cdot 1 + 6 - 2 = 6$ (halbes Parallelogramm mit $A = 12$)
	$i = 3$ $r = 8$ $A = 2 \cdot 3 + 8 - 2 = 12$ (halbes Parallelogramm mit $A = 24$)

Vielecke auf einem Dreieckgitter setzen sich aus Teilfiguren zusammen, bei denen die Eckpunkte entweder längs einer Gitterlinie miteinander verbunden werden oder „diagonal“ wie in den letzten Beispielen. Daher kann die o. a. Berechnungsformel als bestätigt angesehen werden.

Beim nochmaligen Hinschauen fällt auf, dass die Formel für das Quadratgitter $A_Q = i + \frac{1}{2} \cdot r - 1$ und die Formel für das Dreieckgitter $A_D = 2 \cdot i + r - 2$ sich nur um einen Faktor unterscheiden, nämlich um den Faktor 2: $A_D = 2 \cdot i + r - 2 = 2 \cdot (i + \frac{1}{2} r - 1) = 2 \cdot A_Q$.

Dies ist aber plausibel, denn wenn man statt eines Quadratgitters ein Rautengitter betrachtet, ändert sich nichts an der Flächeninhaltsformel, in der ja nur die Randpunkte und die inneren Punkte gezählt werden – die gleiche Figur hat dann auf dem Dreieckraster einen doppelt so großen Flächeninhalt wie auf dem Quadrat- oder Rautenraster.





Geht man bei einem *Sechseckraster* analog vor wie oben, dann findet man bei einfachen Figuren:

Flächeninhalt von Vielecken im Sechseckgitter (vorläufig)

Sind die Eckpunkte eines Vielecks Punkte eines Sechseckgitters, dann lässt sich der Flächeninhalt A des Vielecks berechnen aus der Anzahl r derjenigen Randpunkte, die Gitterpunkte sind, und der Anzahl i der innerhalb des Vielecks liegenden Gitterpunkte:

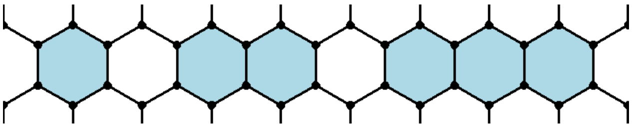
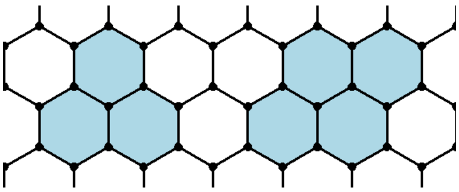
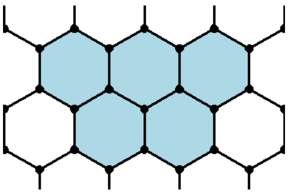
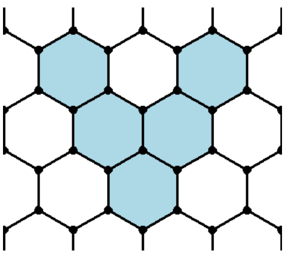
$$A = \tfrac{1}{2}\cdot i + \tfrac{1}{4}\cdot r - \tfrac{1}{2}$$

Dabei wird A in Vielfachen des Flächeninhalts eines Basis-Gittersechsecks gemessen.

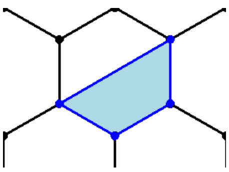
Für den Ansatz $A = a\cdot i + b\cdot r - c$ kann man an den ersten drei Beispielen ablesen, dass der Koeffizient b gleich ¼ sein muss (da mit jedem hinzugekommenen Sechseck jeweils die Anzahl der Randpunkte um 4 steigt – sofern eine solche Gesetzmäßigkeit besteht), und aus den nächsten Beispielen folgt auch, dass c = ½ ist. Dies wird durch die nächsten beiden Beispiele bestätigt.

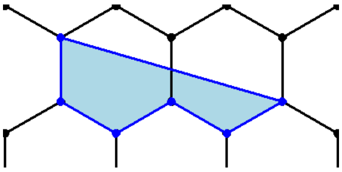
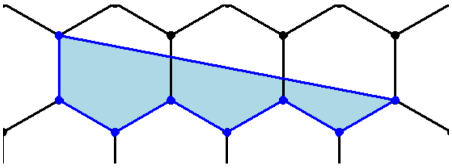
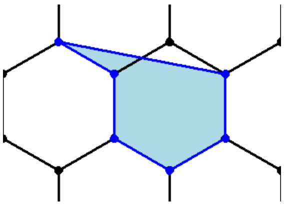
Aus den danach folgenden Beispielen ergibt sich für den Koeffizienten *a*, dass *a* = ½ sein muss (sofern eine Gesetzmäßigkeit besteht.

Beispiele:

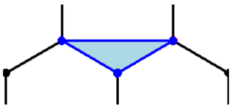
	$i = 0$ $r = 6$ ($r = 10$; $r = 14$) $A = a\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 6 - \frac{1}{2} = 1$ ($A = 2$; $A = 3$)
	$i = 1$ ($I = 2$) $r = 12$ ($r = 14$) $A = a\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 12 - \frac{1}{2} = 3$ ($A = 4$) Hieraus ergibt sich a = ½.
	$i = 3$ $r = 16$ $A = \frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{1}{4}\cdot 16 - \frac{1}{2} = 5$
	$i = 1$ $r = 20$ $A = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 20 - \frac{1}{2} = 5$

Die Berechnungsformel gilt auch für Vielecke, bei denen ein Punkt mit einem gegenüberliegenden Eckpunkt verbunden wird, außerdem auch zu bestimmten Punkten in benachbarten Sechsecken:

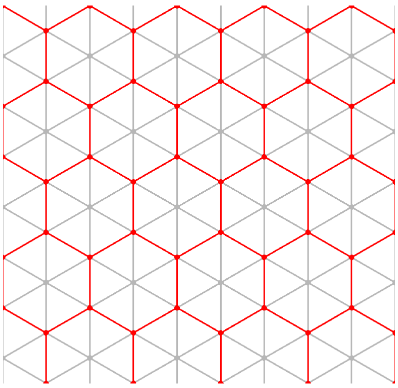
	$i = 0$ $r = 4$ $A = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 4 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

	$i = 0$ $r = 6$ $A = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 6 - \frac{1}{2} = 1$
	$i = 0$ $r = 8$ $A = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 8 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
	$i = 0$ $r = 6$ $A = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 6 - \frac{1}{2} = 1$

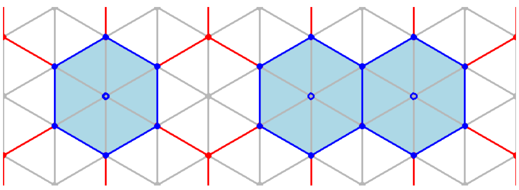
Die Berechnungsformel gilt aber offensichtlich *nicht* für Vielecke, bei denen ein Punkt mit einem übernächsten Punkt desselben Sechsecks verbunden wird:

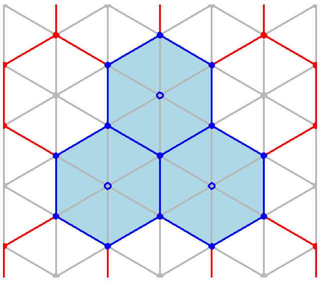
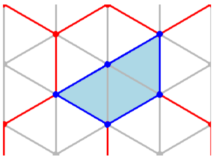
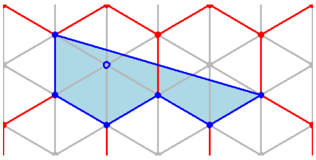
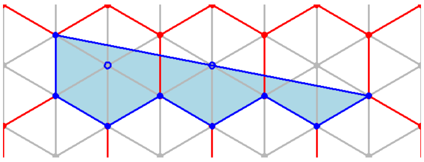
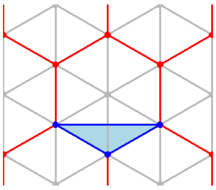
	$i = 0\,;\ r = 3\,;\ A = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ tatsächlich gilt hier: $A = \frac{1}{6}$

Eine Lösung des Problems könnte darin bestehen, dass das Sechseckraster durch gleichseitige Dreiecke ergänzt wird:



Betrachtet man nun einfache Figuren auf dem so ergänzten Sechseckraster, dann müssen zusätzliche innere Punkte berücksichtigt werden (Bezeichnung: i_D), die durch das ergänzte Dreiecksraster hinzukommen, sowie zusätzliche Randpunkte (Bezeichnung: r_D):

	$i_S = 0,\ i_D = 1\ \ (i_S = 0,\ i_D = 2)$ $r_S = 6,\ r_D = 0\ \ (r_S = 10,\ r_D = 0)$ $A_D = 2 \cdot (i_D + i_S) + (r_D + r_S) - 2 = 2 + 6 - 2 = 6,$ $A_S = \frac{1}{6} \cdot A_D = 1$ $(A_D = 2 \cdot (i_D + i_S) + (r_D + r_S) - 2 = 4 + 10 - 2 = 12,$ $A_S = \frac{1}{6} \cdot A_D = 2)$

	$i_S = 1$, $i_D = 3$ $r_S = 12$, $r_D = 0$ $A_D = 2 \cdot (i_D + i_S) + (r_D + r_S) - 2 = 8 + 12 - 2 = 18$; $A_S = \frac{1}{6} \cdot A_D = 3$
	$i_S = 0$, $i_D = 0$ $r_S = 4$, $r_D = 1$ $A_D = 2 \cdot (i_D + i_S) + (r_D + r_S) - 2 = 0 + 5 - 2 = 3$, $A_S = \frac{1}{2}$
	$i_S = 0$, $i_D = 1$ $r_S = 6$, $r_D = 0$ $A_D = 2 \cdot (i_D + i_S) + (r_D + r_S) - 2 = 2 + 6 - 2 = 6$, $A_S = 1$
	$i_S = 1$, $i_D = 0$ $r_S = 8$, $r_D = 1$ $A_D = 2 \cdot (i_D + i_S) + (r_D + r_S) - 2 = 2 + 9 - 2 = 9$, $A_S = \frac{3}{2}$
	$i_S = 0$, $i_D = 0$ $r_S = 3$, $r_D = 0$ $A_D = 2 \cdot (i_D + i_S) + (r_D + r_S) - 2 = 0 + 3 - 2 = 1$, $A_S = \frac{1}{6}$

Die zunächst vermutete Formel ist also nicht allgemein verwendbar. Vielmehr muss man das „darunterliegende“ Dreieckraster berücksichtigen:

Flächeninhalt von Vielecken im Sechseckgitter

Sind die Eckpunkte eines Vielecks Punkte eines Sechseckgitters, dann lässt sich der Flächeninhalt *A* des Vielecks berechnen aus der Anzahl r_S derjenigen Randpunkte, die Gitterpunkte sind, und der Anzahl i_S der innerhalb des Vielecks liegenden Gitterpunkte des Sechseckgitters, sowie der Anzahl r_D der Randpunkte und der Anzahl i_D der inneren Punkte, die sich aus dem „darunterliegenden“ Dreieckraster ergeben:

$$A_S = \frac{1}{3} \cdot (i_D + i_S) + \frac{1}{6} \cdot (r_D + r_S) - \frac{1}{3}$$

Dabei wird *A* in Vielfachen des Flächeninhalts eines Basis-Gittersechsecks gemessen.

Eine Frage zum Schluss:

Wer kann erklären, warum beim Sechseckgitter in manchen Fällen die Gleichung $A = \frac{1}{2} \cdot i + \frac{1}{4} \cdot r - \frac{1}{2}$ richtig ist, obwohl die Koeffizienten doch so sehr von $A_S = \frac{1}{3} \cdot (i_D + i_S) + \frac{1}{6} \cdot (r_D + r_S) - \frac{1}{3}$ abweichen?