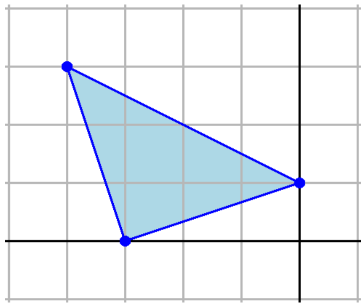
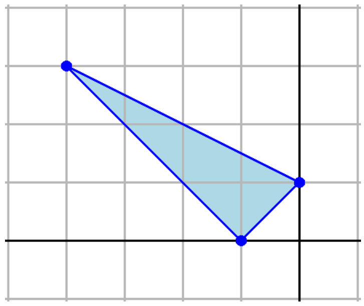
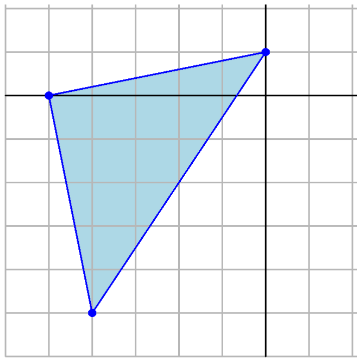
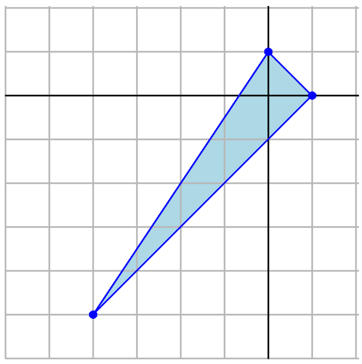
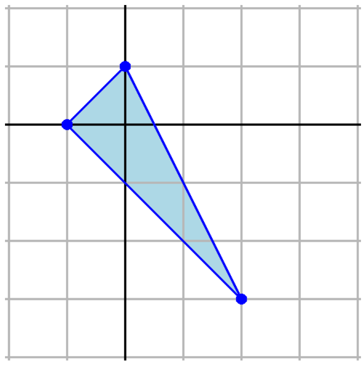
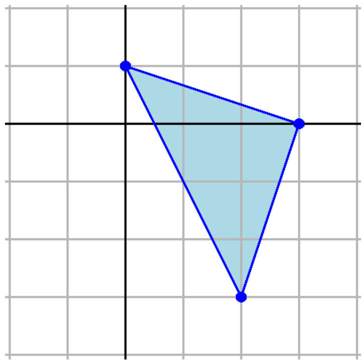
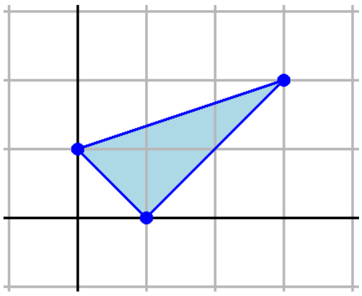
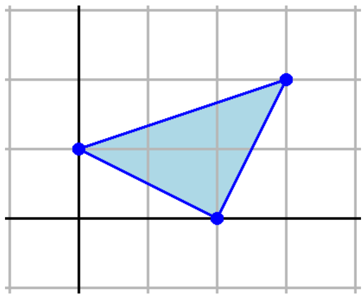
Problem des Monats April 2019

Lösen quadratischer Gleichungen mit dem Geodreieck

- Erläutern Sie den folgenden Satz:
  Ist x eine Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$, dann gilt:
  Das Dreieck ABC mit A(0 | 1), B($-p$ | q), C(x | 0) ist ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\overline{AB}$.
- Gilt auch die Umkehrung des Satzes?
- Und was hat das Ganze mit einem Geodreieck zu tun?

Beispiel 1: $x^2 + 4x + 3 = 0$ Lösungen: x_1 = -3 ; x_2 = -1		
Beispiel 2: $x^2 + 4x - 5 = 0$ Lösungen: x_1 = -5 ; x_2 = 1		
Beispiel 3: $x^2 - 2x - 3 = 0$ Lösungen: x_1 = -1 ; x_2 = +3		
Beispiel 4: $x^2 - 3x + 2 = 0$ Lösungen: x_1 = +1 ; x_2 = +2		

Lösung:

Untersuchung, ob die Gleichung des Satzes von PYTHAGORAS erfüllt ist:

Vorausgesetzt wird $x^2 + px + q = 0$. Dann gilt:

$$\overline{AB}^2 = (0-(-p))^2 + (1-q)^2 = p^2 + (1-q)^2 = p^2 + 1 - 2q + q^2$$

$$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = (x-(-p))^2 + (0-q)^2 + (0-x)^2 + (1-0)^2$$
$$= (x+p)^2 + q^2 + x^2 + 1 = 2x^2 + 2px + p^2 + q^2 + 1$$
$$= 2 \cdot (x^2 + px + q) + p^2 + q^2 + 1 - 2q$$
$$= 2 \cdot 0 + p^2 + q^2 + 1 - 2q = \overline{AB}^2$$

Gilt umgekehrt, dass $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2$, dann ergibt sich hieraus

$$(0-(-p))^2 + (1-q)^2 = (x-(-p))^2 + (0-q)^2 + (0-x)^2 + (1-0)^2$$

Dies lässt sich umformen zu

$p^2 + 1 - 2q + q^2 = x^2 + 1 + p^2 + 2px + x^2 + q^2$ und weiter

$-2q = 2x^2 + 2px$, also $x^2 + px + q = 0$.

Legt man also ein Geodreieck so, dass die beiden Geodreieck-Katheten durch die Punkte A und B gehen und die rechtwinklige Spitze des Geodreiecks auf der *x*-Achse liegt, dann gibt es für diese Lage höchstens zwei Möglichkeiten und diese Stellen auf der *x*-Achse sind die Lösungen der quadratischen Gleichung.

Konsequenz:

Die beiden möglichen rechtwinkligen Dreiecke mit Hypotenuse $\overline{AB}$ ergeben sich auch, wenn man einen THALES-Kreis über $\overline{AB}$ zeichnet:

Betrachtet wird also der Mittelpunkt $M(-\frac{p}{2} \mid \frac{q+1}{2})$ der Strecke $\overline{AB}$ und der Kreis mit Radius *r*

mit $r^2 = \overline{AB}^2 = \left(-\frac{p}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{q+1}{2} - 1\right)^2 = \frac{p^2 + (q-1)^2}{4}$

Die Punkte dieses Kreises können durch die folgende Gleichung beschrieben werden:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{q+1}{2}\right)^2 = \frac{p^2 + (q-1)^2}{4}$$

Falls der Kreis die *x*-Achse schneidet, dann gilt

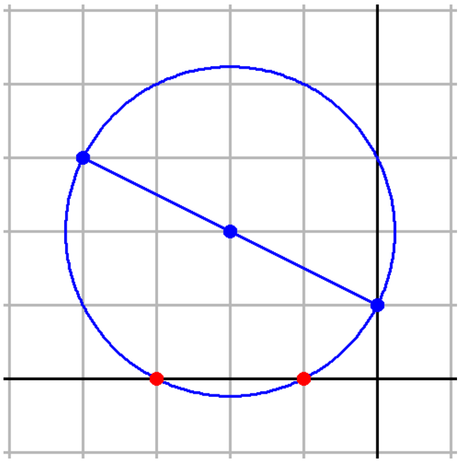
$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{q+1}{2}\right)^2 = \frac{p^2 + (q-1)^2}{4}$, was äquivalent ist zu

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{4} + \frac{q}{2} + \frac{1}{4} = \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{4} - \frac{q}{2} + \frac{1}{4} \iff$$

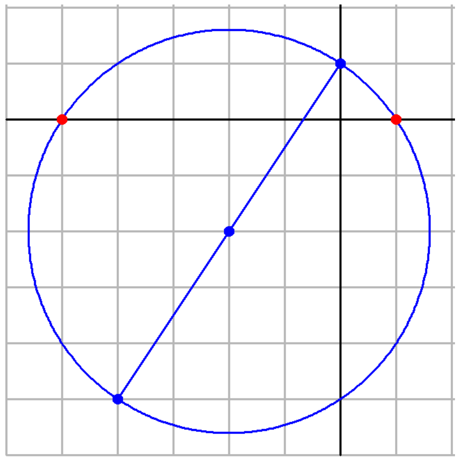
$$x^2 + px + \frac{q}{2} = -\frac{q}{2} \iff$$

$$x^2 + px + q = 0.$$

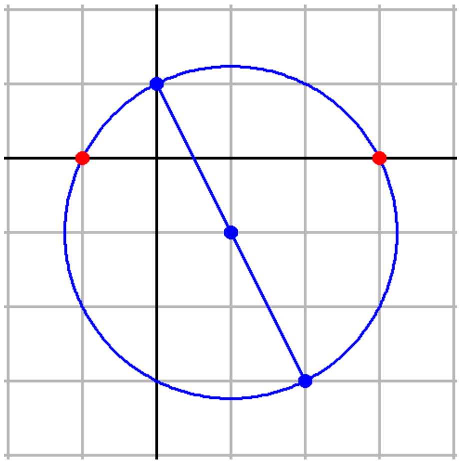
Die o. a. Aufgaben könnten also auch mithilfe eines Zirkels gelöst werden:



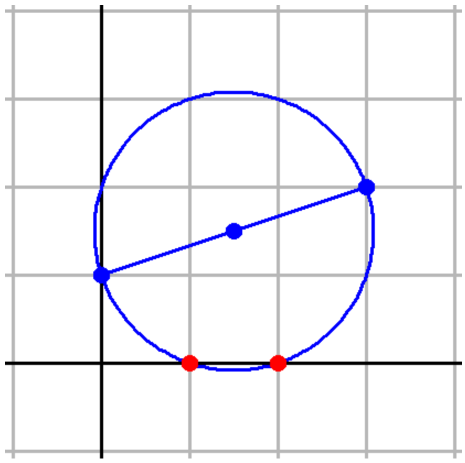
Beispiel 1: $x^2 + 4x + 3 = 0$



Beispiel 2: $x^2 + 4x - 5 = 0$



Beispiel 3: $x^2 - 2x - 3 = 0$



Beispiel 4: $x^2 - 3x + 2 = 0$

Literaturhinweise:

BENJAMIN BOLD (1969): *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*, Reprint Dover 1989, S. 3-4

ARUN KUMAR (1981-82): *A new technique of solving quadratic equations*, Journal of Recreational Mathematics 14(4), S. 266-270