Blatt 8: Ein Umfüllproblem

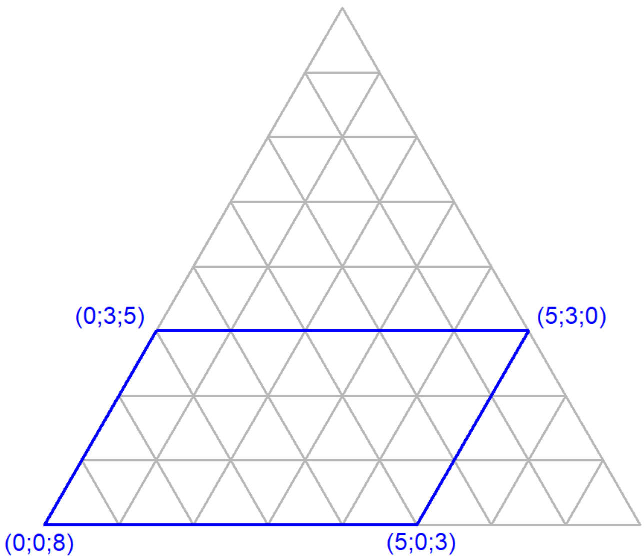
Der Franziskanermönch Albert von Stade veröffentlichte das folgende klassische Umfüllproblem

Jemand hat in der Stadt Wein eingekauft und geht mit einem Gefäß, das genau 8 Liter enthält, nach Hause. Auf dem Heimweg trifft er einen anderen, der mit zwei Gefäßen, die genau 3 Liter und 5 Liter umfassen, Wein holen soll. Sie beschließen, den Wein des ersten hälftig zu teilen. Wie können sie vorgehen, wenn sie auch keine anderen Behälter haben?

Im Folgenden soll das 8-Liter-Gefäß mit C bezeichnet werden, das 5-Liter-Gefäß mit A, das 3-Liter-Gefäß mit B. Am Ende des Umfüllvorgangs sollen jeweils 4 Liter Wein in Gefäß A und in Gefäß C enthalten sein.

Die Summe der Flüssigkeitsmengen in den drei Gefäßen A, B und C ist konstant gleich 8 Liter, d. h., die jeweils aktuellen Füllmengen a, b, c der drei Gefäße A, B, C können mithilfe eines Tripels $(a; b; c)$ mit $a+b+c=8$ beschrieben werden.

Das Problem lässt sich grafisch wie folgt darstellen:



- Zu Beginn des Vorgangs hat man den Füllzustand $(0; 0; 8)$.
- Aus Gefäß C kann man maximal 5 Liter der Flüssigkeit in Gefäß A füllen; dann liegt der Füllzustand $(5; 0; 3)$ vor.
- Aus Gefäß C kann man maximal 3 Liter der Flüssigkeit in Gefäß B füllen; dann liegt der Füllzustand $(0; 3; 5)$ vor.
- Man kann Gefäß C auch vollständig leeren, indem man 5 Liter der Flüssigkeit in Gefäß A füllt und 3 Liter in Gefäß B; dann liegt der Füllzustand $(5; 3; 0)$ vor.

Diese vier extremen Füllzustände sind in der Grafik oben als Eckpunkte eines Parallelogramms dargestellt. Füllzustände außerhalb des Parallelogramms sind nicht möglich.

- **Was ist in der folgenden Grafik dargestellt? Wie kann man die o. a. Aufgabe lösen?**