

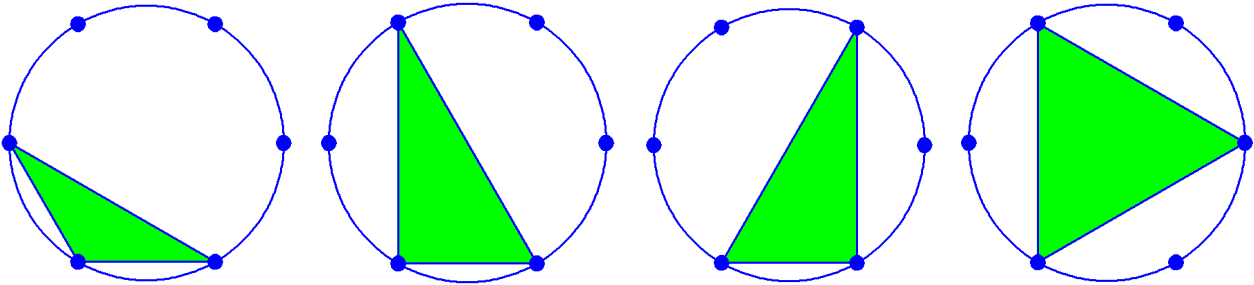
## Problem des Monats März 2019

### Geometrische Figuren im regelmäßigen Sechseck

(1) Von den sechs Eckpunkten eines regelmäßigen Sechsecks mit Seitenlänge 1 werden drei zufällig ausgewählt und durch einen Streckenzug miteinander verbunden.

Die folgenden vier Abbildungen zeigen die möglichen Typen, die entstehen können.

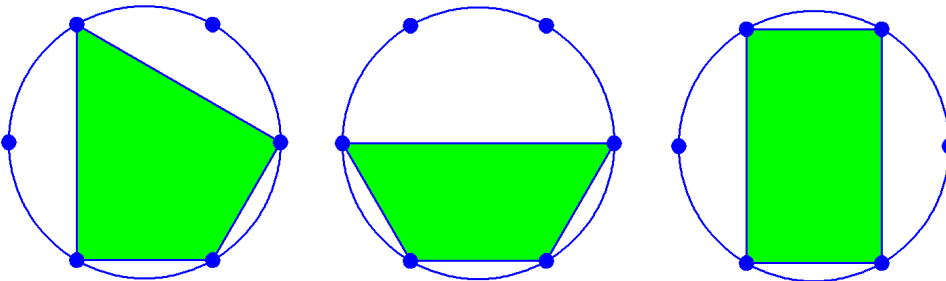
- Welchen Flächeninhalt hat dieses zufällig entstehende Dreieck im Mittel?



(2) Von den sechs Eckpunkten eines regelmäßigen Sechsecks mit Seitenlänge 1 werden vier zufällig ausgewählt. Diese Eckpunkte werden – im Gegenuhrzeigersinn – durch einen Streckenzug miteinander verbunden, sodass ein konvexes Viereck entsteht.

Die folgenden drei Abbildungen zeigen die möglichen Typen, die entstehen können.

- Welchen Flächeninhalt hat dieses zufällig entstehende Viereck im Mittel?



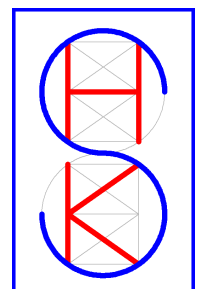
(3) Die sechs Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks werden im Gegenuhrzeigersinn umlaufend mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert. Bei einem **Spiel mit sechs Würfeln** geben die gewürfelten Augenzahlen an, welche Eckpunkte des Sechsecks durch einen Streckenzug miteinander verbunden werden:

Werden sechs gleiche Augenzahlen gewürfelt, dann entsteht eine geometrische Figur, die nur aus einem Punkt besteht, und wenn zwei verschiedene Augenzahlen gewürfelt werden, entsteht eine Strecke (in beiden Fällen ergibt sich der Flächeninhalt 0).

...

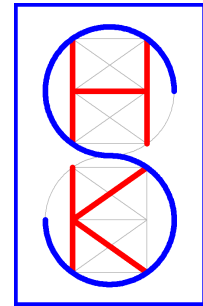
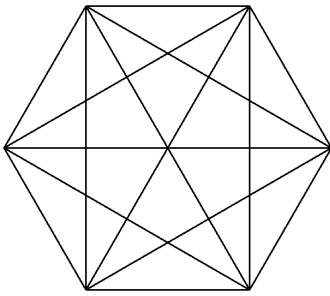
Wenn sechs verschiedene Augenzahlen gewürfelt werden, erhält man das regelmäßige Sechseck selbst.

- Welchen Flächeninhalt haben die erwürfelten geometrischen Figuren im Mittel?



## Lösung

Für die einzelnen Teilaufgaben betrachte man das folgende regelmäßige 6-Eck mit seinen Diagonalen:



(1) Dass 3 von 6 Punkten zufällig ausgewählt werden, bedeutet, dass es  $\binom{6}{3} = 20$

Möglichkeiten der Auswahl gibt. Von diesen haben je 6 die erste, zweite oder dritte Form; für die vierte Form gibt es 2 mögliche Kombinationen.

Die erste Form besteht aus zwei halben gleichseitigen Dreiecken mit einem Flächeninhalt von insgesamt  $\frac{1}{4} \cdot \sqrt{3}$ , die zweite und dritte Form setzen sich aus vier halben gleichseitigen Dreiecken mit einem Flächeninhalt von insgesamt  $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$  zusammen und die vierte Form aus sechs halben gleichseitigen Dreiecken mit einem Flächeninhalt von insgesamt  $\frac{3}{4} \cdot \sqrt{3}$ .

Im Mittel ergibt sich daher ein Flächeninhalt von

$$\frac{6}{20} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \frac{6}{20} \cdot \frac{2}{4} \cdot \sqrt{3} + \frac{2}{20} \cdot \frac{3}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{6 + 24 + 6}{80} \cdot \sqrt{3} = \frac{9}{20} \cdot \sqrt{3} \approx 0,779$$

(2) Dass 4 von 6 Punkten zufällig ausgewählt werden, bedeutet, dass es  $\binom{6}{4} = 15$

Möglichkeiten der Auswahl gibt. Von diesen haben je 6 die erste oder zweite Form; für die dritte Form gibt es 3 mögliche Kombinationen.

Die erste Form besteht aus acht halben gleichseitigen Dreiecken mit einem Flächeninhalt von insgesamt  $\frac{4}{4} \cdot \sqrt{3}$ , die zweite Form setzen sich aus sechs halben gleichseitigen Dreiecken mit einem Flächeninhalt von insgesamt  $\frac{3}{4} \cdot \sqrt{3}$  zusammen und die dritte Form aus acht halben gleichseitigen Dreiecken mit einem Flächeninhalt von insgesamt  $\frac{4}{4} \cdot \sqrt{3}$ .

Im Mittel ergibt sich daher ein Flächeninhalt von

$$\frac{6}{15} \cdot \frac{4}{4} \cdot \sqrt{3} + \frac{6}{15} \cdot \frac{3}{4} \cdot \sqrt{3} + \frac{3}{15} \cdot \frac{4}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{24 + 18 + 12}{60} \cdot \sqrt{3} = \frac{9}{10} \cdot \sqrt{3} \approx 1,559$$

(3) Zur Klarstellung sei betont, dass nach dem Würfeln die „ausgewählten“ Eckpunkte so miteinander verbunden werden, dass (im Falle von mehr als zwei verschiedenen Augenzahlen) konvexe Figuren entstehen. (Wenn dies nicht so gemeint wäre, würde im Fall von lauter verschiedenen Augenzahlen nicht unbedingt das regelmäßige Sechseck entstehen.)

Insgesamt gibt es  $6^6 = 46.656$  mögliche Ergebnisse; bei diesen sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:

- Sechsmal dieselbe Augenzahl: damit sind 6 der 46.656 Möglichkeiten erfasst.

- Zwei verschiedene Augenzahlen: Auswahl der zwei Zahlen =  $\binom{6}{2} = 15$  Möglichkeiten; die erste der beiden Zahlen kann 1-mal, 2-mal, 3-mal, 4-mal, 5-mal vorkommen, insgesamt sind dies  $\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} = 62$  Möglichkeiten für die erste Zahl bei den 6 Würfeln; insgesamt sind damit  $15 \cdot 62 = 930$  der 46.656 Möglichkeiten erfasst.
- Drei verschiedene Augenzahlen: Auswahl der drei Zahlen =  $\binom{6}{3} = 20$  Möglichkeiten; Anzahl der Häufigkeiten, mit denen die drei Augenzahlen vorkommen können:  
 $3 \cdot \binom{6}{1,1,4} + 6 \cdot \binom{6}{1,2,3} + 1 \cdot \binom{6}{2,2,2} = 90 + 360 + 90 = 540$ ; insgesamt sind damit  $20 \cdot 540 = 10.800$  der 46.656 Möglichkeiten erfasst.
- Vier verschiedene Augenzahlen: Auswahl der vier Zahlen =  $\binom{6}{4} = 15$  Möglichkeiten; Anzahl der Häufigkeiten, mit denen die vier Augenzahlen vorkommen können:  
 $4 \cdot \binom{6}{1,1,1,3} + 6 \cdot \binom{6}{1,1,2,2} = 480 + 1080 = 1560$ ; insgesamt sind damit  $15 \cdot 1560 = 23.400$  der 46.656 Möglichkeiten erfasst.
- Fünf verschiedene Augenzahlen: Auswahl der fünf Zahlen =  $\binom{6}{5} = 6$  Möglichkeiten; Anzahl der Häufigkeiten, mit denen die fünf Augenzahlen vorkommen können:  
 $5 \cdot \binom{6}{1,1,1,1,2} = 1800$ ; insgesamt sind damit  $6 \cdot 1800 = 10.800$  der 46.656 Möglichkeiten erfasst.
- Sechs verschiedene Augenzahlen: Auswahl der sechs Zahlen =  $\binom{6}{6} = 1$  Möglichkeit; Anzahl der möglichen Wurffolgen:  $6! = 720$ .

**Kontrollrechnung:**  $6 + 930 + 10800 + 23400 + 10800 + 720 = 46656$

### Fehlende Flächenberechnungen:

Wenn 5 verschiedene Augenzahlen gewürfelt werden, entsteht stets eine Figur, deren Flächeninhalt dem von 10 halben gleichseitigen Dreiecken entspricht, d. h., bei allen 6 Figuren tritt der Flächeninhalt  $\frac{6}{6} \cdot \frac{5}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{5}{4} \cdot \sqrt{3} \approx 2,165$  auf.

Wenn 6 verschiedene Augenzahlen gewürfelt werden, entsteht ein regelmäßiges Sechseck, dessen Flächeninhalt dem von 6 gleichseitigen Dreiecken entspricht, d. h., hier ist der Flächeninhalt  $\frac{6}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \approx 2,598$ .

### Mittelwert insgesamt:

$$\frac{1}{46656} \cdot \left( 6 \cdot 0 + 930 \cdot 0 + 10800 \cdot \frac{9}{20} \cdot \sqrt{3} + 23400 \cdot \frac{9}{10} \cdot \sqrt{3} + 10800 \cdot \frac{5}{4} \cdot \sqrt{3} + 720 \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \right)$$

$$= \frac{40500}{46656} \cdot \sqrt{3} \approx 1,5035$$