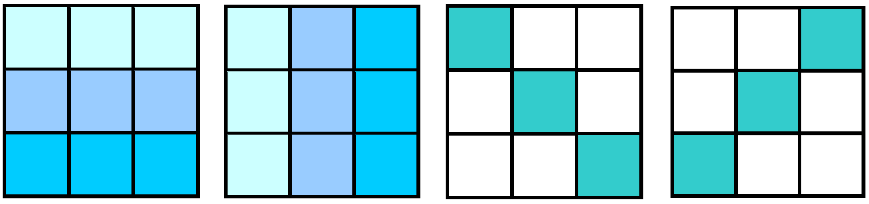
Magische Quadrate

Der folgende Beitrag enthält Ausschnitte aus verschiedenen Abschnitten von Kap. 10 des neuen Buches „Mathematik ist wunderwunderschön“, das voraussichtlich Ende Februar erscheint.

Ein quadratisches Zahlenschema wird als *magisches Quadrat* bezeichnet, wenn die Summe der Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte sowie in jeder der beiden Diagonalen übereinstimmt – in den folgenden Abbildungen ist dies für das 3×3-Quadrat durch Farben verdeutlicht.



Wir werden im Folgenden nur magische Quadrate betrachten, die mit *aufeinanderfolgenden* natürlichen Zahlen beschriftet sind und bei denen jeweils die Zahl 1 die kleinste Zahl ist.

Bestimmt man die Summe der Zahlen aus *allen* Feldern, dann kann man hieraus die sog. **magische Zahl** ermitteln, das ist diejenige natürliche Zahl, die sich jeweils als Summe in den einzelnen Zeilen, Spalten und Diagonalen ergeben muss.

Im magischen 3×3-Quadrat (sog. **Quadrat 3. Ordnung**) ist die Summe *aller* eingetragenen natürlichen Zahlen gleich

$1+2+3+4+5+6+7+8+9=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 10=45$ (vgl. z. B. *Mathematik ist schön*, Kap. 2.1).

Da hier *drei* Zeilen mit jeweils gleichen Summen vorhanden sind, ergibt sich der dritte Teil davon, also 15, als magische Zahl.

Allgemein ist im magischen $n \times n$-Quadrat (sog. magisches Quadrat *n*-ter Ordnung) die Summe aller eingetragenen natürlichen Zahlen gleich

$1+2+3+...+15+n^2=\frac{1}{2}\cdot n^2\cdot\left(n^2+1\right)$.

Da hier *n* Zeilen (Spalten) mit jeweils gleichen Summen vorhanden sind, ergibt sich der *n*-te Teil davon, also $\frac{1}{2}\cdot n\cdot\left(n^2+1\right)$, als **magische Zahl**.

Es gibt acht verschiedenen Möglichkeiten, ein magisches 3×3-Quadrat zu bilden. Da sich aber alle acht Quadrate durch einfache geometrische Operationen auseinander ergeben, gibt es nur einen *Typ* eines magischen 3×3-Quadrats.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

2	7	6
9	5	1
4	3	8

8	3	4
1	5	9
6	7	2

4	9	2
3	5	7
8	1	6

6	1	8
7	5	3
2	9	4

6	7	2
1	5	9
8	3	4

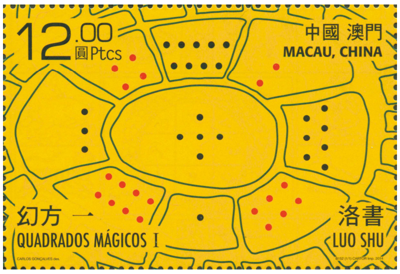
8	1	6
3	5	7
4	9	2

4	3	8
9	5	1
2	7	6

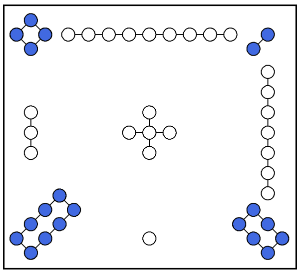
Die magische Zahl, also die Summe der Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen, beträgt 15. Bei den acht Varianten dieses Typs steht die Zahl 5 im mittleren Feld, die ungeraden Zahlen stehen in den Eckfeldern.

Das bekannteste 3×3-Quadrat ist das sog. Lo-Shu-Quadrat, das im alten China (mindestens) seit 650 v. Chr. bekannt war – es ist auf der Briefmarke aus Macau links abgebildet und zeigt den Panzer einer Schildkröte.

Der Sage nach soll es zu Zeiten des Kaisers Yu (um 2200 v. Chr.) eine gewaltige Flut gegeben haben, aus der eine Schildkröte kroch, auf deren Panzer das Muster mit der Darstellung der ersten neun natürlichen Zahlen eingetragen war. Mithilfe dieses Musters soll es dann den Menschen gelungen sein, den Fluss zu zähmen und sich zukünftig vor Überschwemmungen zu schützen.



4	9	2
3	5	7
8	1	6



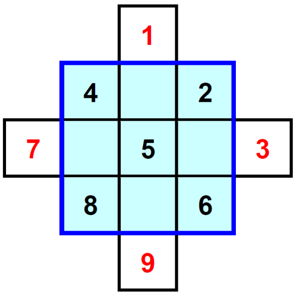
Zur Konstruktion magischer Quadrate mit ungerader Ordnung

Bei magischen 3×3-Quadraten kann man sicherlich eine der acht Möglichkeiten durch Probieren herausfinden und dann die übrigen Varianten des gefundenen Typs durch Spiegelung oder Drehung erhalten. Mit etwas Geduld findet man auch eine der 880 möglichen Typen eines magischen 4×4-Quadrats. Doch obwohl es 275.305.224 verschiedene Typen von magischen Quadraten fünfter Ordnung gibt (wie man erst 1973 mit Computerhilfe herausfand), wird man ohne eine systematische Vorgehensweise ein solches wohl kaum finden.

Im Laufe der Jahrhunderte wurden viele Ideen entwickelt, wie man magische Quadrate konstruieren kann. Für magische Quadrate *ungerader* Ordnung gibt es zwei einfache, aber allgemeine Verfahren, die wir im Folgenden erläutern. Im Übrigen verweisen wir auf die umfangreiche Literatur zum Thema.

Der französische Mathematiker **Claude Gaspard Bachet de Méziriac** (1581-1638) veröffentlichte in seinem berühmten Buch *Problèmes plaisans et delectables, qui se font par les nombres* eine allgemeine Methode zur Konstruktion magischer Quadrate mit ungerader Ordnung. Diese ist auch beim magischen 3×3-Quadrat anwendbar.

Zunächst trägt man die natürlichen Zahlen von 1 bis 9 zeilenweise in ein gedrehtes quadratisches Schema ein (doppelte „Pyramide" mit $1+3+5+3+1=13$ Feldern, von denen 4 Felder frei bleiben), vgl. folgende Abbildung links. Dann verschiebt man alle außerhalb des blauen Rahmens stehenden Zahlen in das blaue Quadrat hinein, und zwar in das am weitesten entfernte freie Feld; dabei rücken die Zahlen jeweils 3 Felder weiter.



4	9	2
3	5	7
8	1	6

Beim magischen Quadrat fünfter Ordnung werden entsprechend zunächst die natürlichen Zahlen von 1 bis 25 in eine solche doppelte „Pyramide" mit $1+3+5+7+9+7+5+3+1=41$ Feldern eingetragen, von denen 16 Felder frei bleiben. Dann rücken wieder die außerhalb des blauen Rahmens stehenden Zahlen in das am weitesten entfernte Feld im blauen Quadrat vor (jeweils um 5 Felder), vgl. Abb. 10.2.

				1				
			6		2			
		11		7		3		
	16		12		8		4	
21		17		13		9		5
	22		18		14		10	
		23		19		15		
			24		20			
				25				

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Eine vermutlich aus Indien stammende Methode, magische Quadrate mit *ungerader* Ordnung zu konstruieren, wurde im Jahr 1688 durch den französischen Botschafter im Königreich Siam, **Simon de la Loubère**, in Europa bekannt – man kann sie auch als Nordost-Methode bezeichnen.

Man beginnt damit, dass man die Zahl 1 in das mittlere Feld am oberen Rand einträgt, und trägt dann von dort aus schräg nach oben (Richtung Nordost) fortlaufend die nächsten natürlichen Zahlen ein.

Dabei sind drei Regeln zu beachten:

(1) Wenn der obere Rand eines Quadrats erreicht wird, trägt man die nächste Zahl in ein Feld der untersten Zeile in der nächsten Spalte ein.

(2) Wenn der rechte Rand eines Quadrats erreicht wird, trägt man die nächste Zahl in ein Feld der äußerst links liegenden Spalte in der nächsten Zeile ein.

(3) Gelangt man zu einem Feld, das bereits belegt ist, oder in die rechte obere Ecke des Quadrats, dann setzt man das Verfahren im darunterliegenden Feld fort.

Beim 3×3-Quadrat bedeutet dies folgendes:

		2	
	1		
3			3
		2	

			7
	1	6	
3	5		
4		2	

	9		
8	1	6	8
3	5	7	
4	9	2	

Und beim 5×5-Quadrat ergibt dies:

			2		
		1			
	5				
4					4
				3	
			2		

				9	
		1	8		
	5	7			
4	6				
				3	10
			2	9	

					16
		1	8	15	
	5	7	14	16	
4	6	13			
10	12			3	
11			2	9	

	18				
17		1	8	15	17
	5	7	14	16	
4	6	13	20		
10	12	19		3	
11	18		2	9	

17		1	8	15	
	5	7	14	16	23
4	6	13	20	22	
10	12	19	21	3	
11	18		2	9	

		25			
17	24	1	8	15	
23	5	7	14	16	
4	6	13	20	22	
10	12	19	21	3	
11	18	25	2	9	

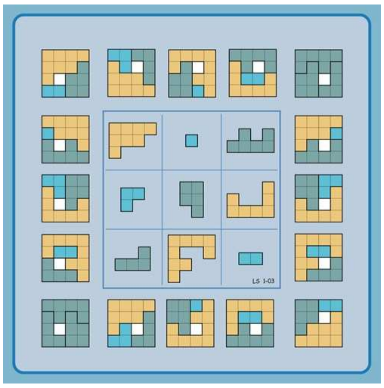
Geomagische Quadrate

Im Jahr 2001 veröffentlichte der in den Niederlanden lebende britische Elektronikingenieur Lee Sallows erste Beispiele geomagischer Quadrate und überraschte damit die große Gemeinde der Fans der Unterhaltungsmathematik. Die Zahlen in den Quadraten ersetzte Sallows durch einfache geometrische Figuren, die Summenbildung innerhalb der Zeilen, Spalten und Diagonalen durch Aneinanderlegen dieser Figuren.

Beispielsweise zeigt die folgende Grafik eine Veranschaulichung des Lo-Shu-Quadrats - dargestellt durch puzzle-artige Muster aus Quadraten in der Art der Polyominos (vgl. *Mathematik ist schön*, Kap. 5), die, aneinandergelegt, jeweils das gleiche Gesamtmuster ergeben – vergleichbar der magischen Zahl.

Quelle der Abbildung:

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Geomagic_square_-_3x3_normal_sqare_target.jpg



Das Lo-Shu-Quadrat ist das in der Mitte liegende 3×3-Quadrat. Am rechten Rand ist jeweils das Gesamtpuzzle aus den daneben stehenden Puzzlestücken des 3×3-Quadrats zu sehen – vergleichbar der Zeilensumme, unten das Gesamtpuzzle, das sich aus den darüber stehenden Puzzlestückendes 3×3-Quadrats ergibt (links und oben jeweils das gespiegelte Gesamtpuzzle). An den vier Ecken steht jeweils das Gesamtpuzzle, wie es sich aus dem Zusammenlegen der Puzzlestücke in den Diagonalen ergibt. In allen Fällen müssen einzelne Puzzlestücke gedreht oder umgedreht werden.

Diese „Summen“ aus Zeilen, Spalten und Diagonalen sind jeweils 16er-Quadrate, bei denen ein *inneres* Feld fehlt, d. h., die Gesamtpuzzles bestehen jeweils aus 15 Quadraten, was der magischen Zahl des Lo-Shu-Quadrats entspricht.

In seinem Buch *Geometric Magic Squares – A Challenging New Twist Using Colored Shapes Instead of Numbers* stellt Sallows ausführlich dar, wie sich in seinem Kopf die Ideen zu dieser Art der Darstellung von magischen Quadraten entwickelten. Mithilfe eines Computer-Programms fand er dann 4370 Möglichkeiten ein Lo-Shu-Puzzle zu erstellen. Auch auf seiner Website (www.geomagicsquares.com/) findet man zahlreiche faszinierende Beispiele von geomagischen Figuren, die von Lee Sallows selbst entwickelt wurden bzw. aus seiner Fan-Gemeinde stammen.