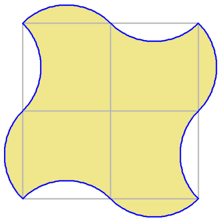
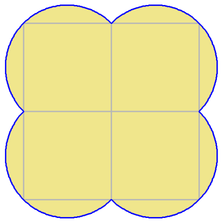
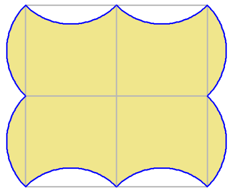
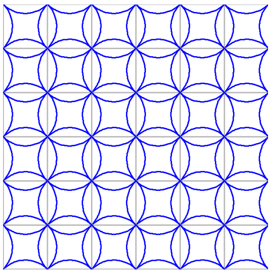
Einfache Figuren aus Viertelkreisbögen

In Kap. 9 von *Mathematik ist wunderwunderschön* findet man u. a. die folgenden Figuren:

Sie entstehen, wenn man ein Quadratraster ergänzt durch Kreise, die um die Quadratmittelpunkte gezeichnet werden und durch die Ecken der Quadrate verlaufen.



Bei den drei oben abgebildeten Figuren beschränkt man sich auf diejenigen Viertelkreisbögen, die durch die außen liegenden Eckpunkte eines 2×2-Quadrats verlaufen.

Bezeichnet man diese Viertelkreisbögen mit „1“, wenn der Kreismittelpunkt innerhalb des betr. Quadrats liegt, und mit „0“, wenn er außerhalb liegt, dann lassen sich diese beiden Formen auf vier Arten kombinieren: 11, 10, 01, 00. Mithilfe dieser vier Fälle, die hier wie Dualzahlen notiert sind, kann man die einzelnen Figuren beschreiben (Beschreibung der vier Quadratseiten, oben links beginnend, im Uhrzeigersinn).

Betrachtet man das 2×2-Quadrat mit seinen acht Abschnitten auf der Umfangslinie, dann ergeben sich $2^8 = 256$ Möglichkeiten der Beschriftung mit 0 und 1.

Von dieser großen Zahl an Möglichkeiten entfallen aber etliche, weil durch wiederholtes Drehen der Figuren um jeweils 90° sich die Bezeichnungen zyklisch wiederholen, beispielsweise

11|11|11|11 → 11|11|11|11

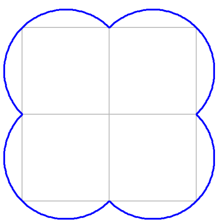
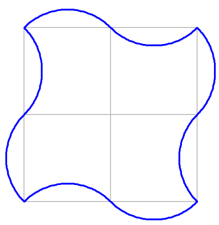
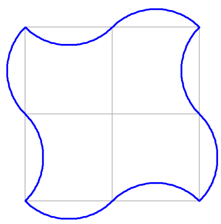
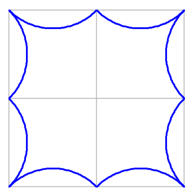
10|01|10|01 → 01|10|01|10 → 10|01|10|01

11|11|00|00 → 11|00|00|11 → 00|00|11|11 → 11|00|00|11

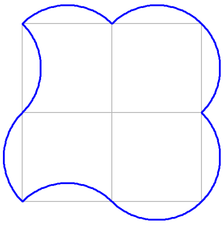
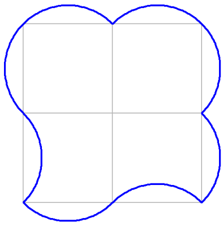
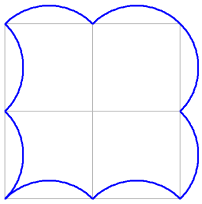
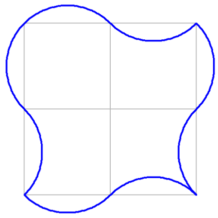
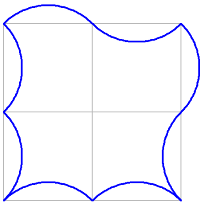
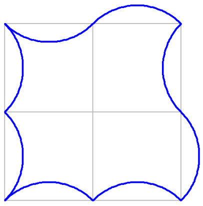
d. h., die Anzahl der tatsächlich voneinander verschiedenen Figuren lässt sich nur durch nähere Untersuchungen herausfinden.

Zur Vereinfachung notieren wir anstelle der Dualzahlen jeweils zugehörige Zahlen im Vierersystem, also statt 11|11|11|11 die Zahl 3333, statt 10|10|10|10 die Zahl 2222 usw.

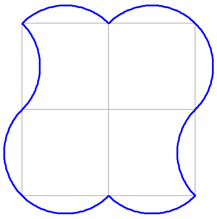
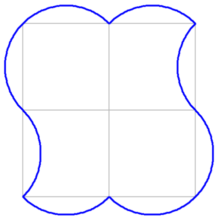
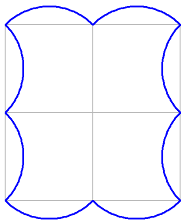
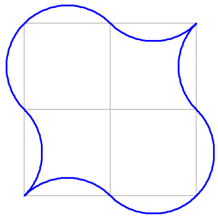
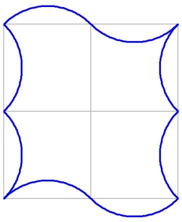
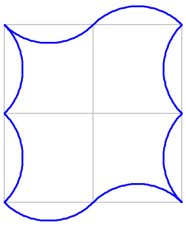
Die folgenden vier Figuren ändern sich nicht, wenn sie um Vielfache von 90° gedreht werden:

			
3333	2222	1111	0000

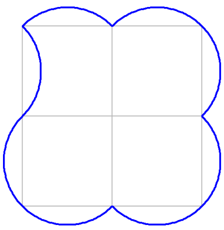
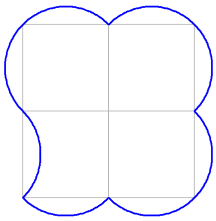
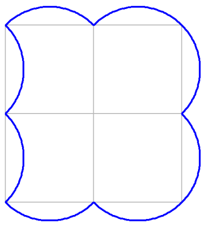
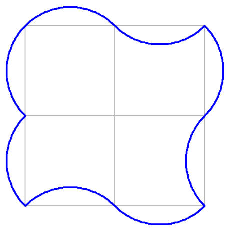
Zu den folgenden 6 Figuren, deren Bezeichnung im Vierersystem jeweils aus zwei verschiedenen Ziffern besteht, die jeweils paarweise auftreten, existieren noch jeweils drei weitere, die sich durch wiederholte 90°-Drehungen ergeben, z. B. 3322 → 3223 → 2233 → 2332. Insgesamt werden hiermit 4 · 6 = 24 Figuren erfasst.

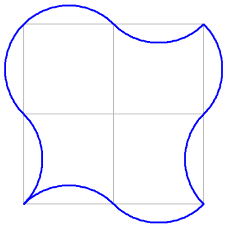
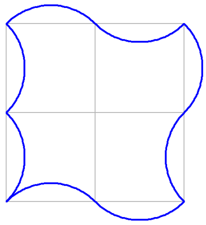
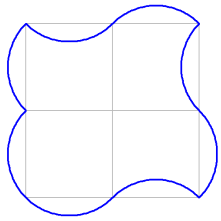
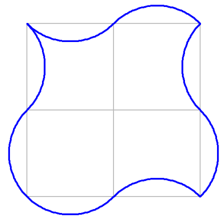
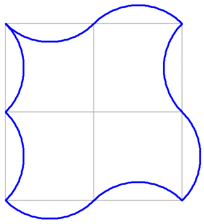
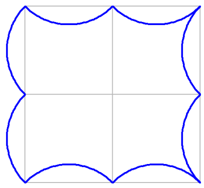
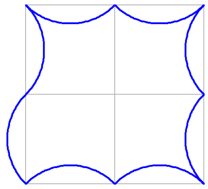
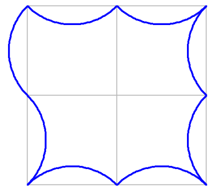
 3322	 3311	 3300	 2211
 2200	 1100		

Zu den folgenden 6 Figuren, deren Bezeichnung im Vierersystem jeweils aus zwei verschiedenen Ziffern besteht, die abwechselnd aufeinander folgen, existiert nur noch jeweils eine weitere Figur, die sich durch eine 90°-Drehung ergibt, z. B. 3232 → 2323. Insgesamt werden hiermit 2 · 6 = 12 Figuren erfasst.

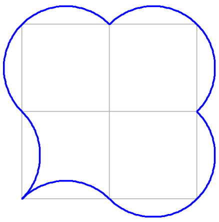
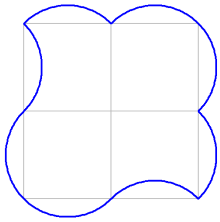
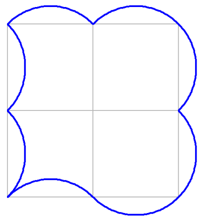
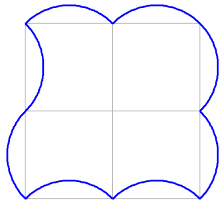
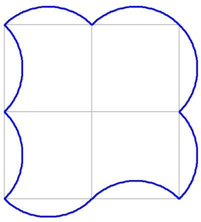
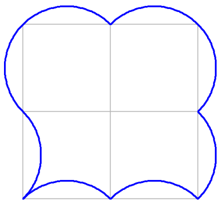
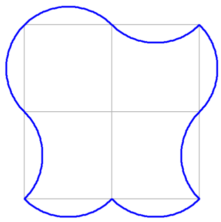
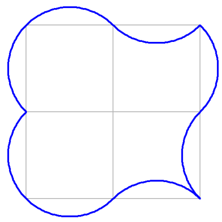
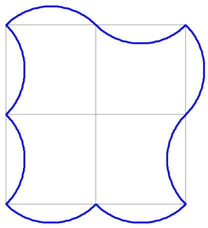
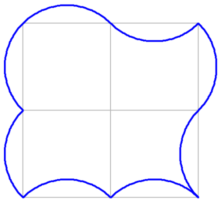
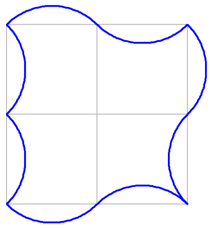
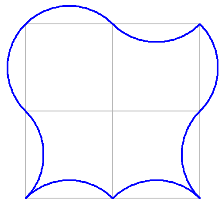
 3232	 3131	 3030	 2121
 2020	 1010		

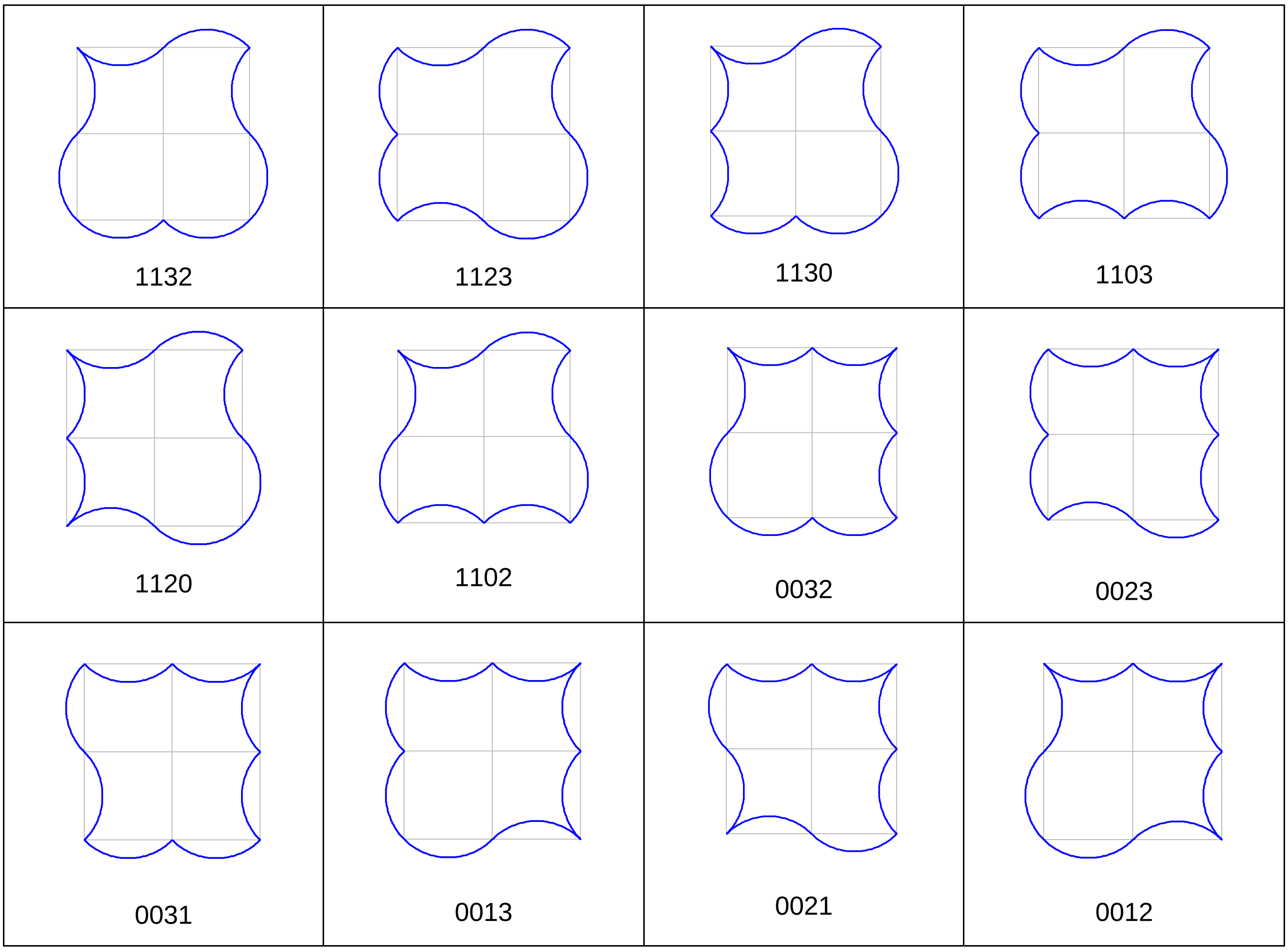
Zu den folgenden 12 Figuren, deren Bezeichnung im Vierersystem jeweils aus zwei verschiedenen Ziffern besteht, wovon eine dreimal vorkommt, existieren jeweils drei weitere, die sich durch wiederholte 90°-Drehungen ergeben, z. B. 3332 → 3323 → 3233 → 2333. Insgesamt werden hiermit 4 · 12 = 48 Figuren erfasst.

 3332	 3331	 3330	 2223

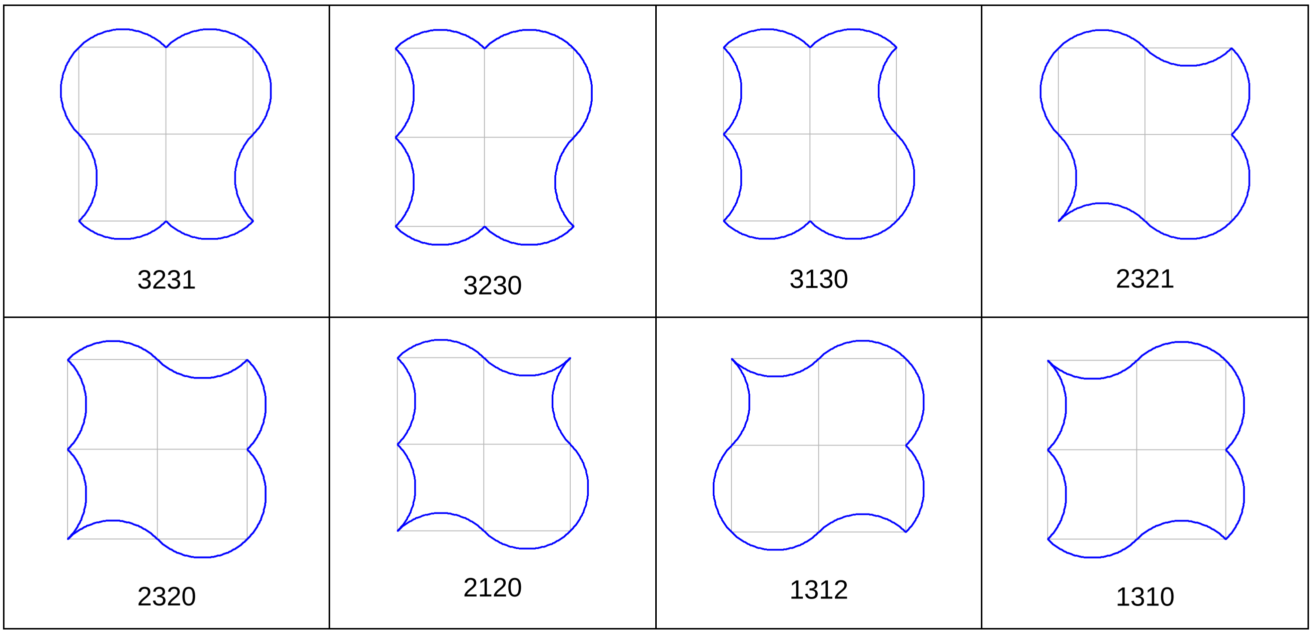
 2221	 2220	 1113	 1112
 1110	 0003	 0002	 0001

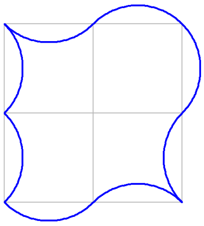
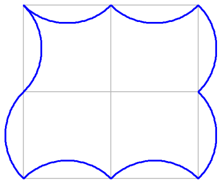
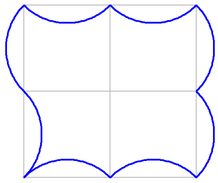
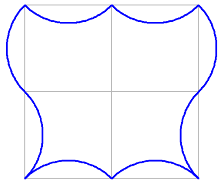
Zu den folgenden 12 Figuren, deren Bezeichnung im Vierersystem jeweils aus drei verschiedenen Ziffern besteht, von denen zwei gleiche aufeinander folgen, existieren jeweils drei weitere, die sich durch wiederholte 90°-Drehungen ergeben, z. B. 3321 → 3213 → 2133 → 1332. Insgesamt werden hiermit 4 · 24 = 96 Figuren erfasst.

 3321	 3312	 3320	 3302
 3310	 3301	 2231	 2213
 2230	 2203	 2210	 2201

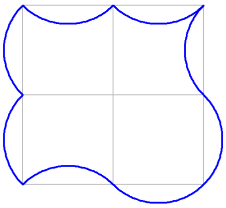
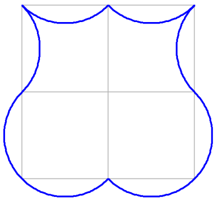
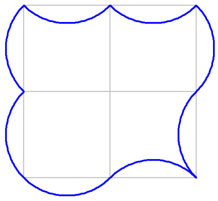
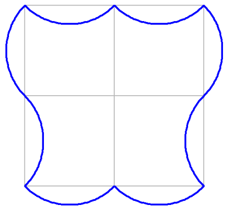
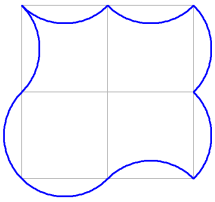
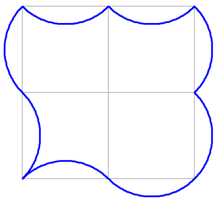


Zu den folgenden 9 Figuren, deren Bezeichnung im Vierersystem jeweils aus drei verschiedenen Ziffern besteht, wovon die doppelt vorkommende Ziffer jeweils zwischen den anderen beiden liegt, existieren jeweils drei weitere, die sich durch wiederholte 90°-Drehungen ergeben, z. B. 3231 → 2313 → 3132 → 1323. Insgesamt werden hiermit 4 · 12 = 48 Figuren erfasst.



 1210	 0302	 0301	 0201

Zu den folgenden 6 Figuren, deren Bezeichnung im Vierersystem jeweils aus vier verschiedenen Ziffern besteht, existieren jeweils drei weitere, die sich durch wiederholte 90°-Drehungen ergeben, z. B. 0123 → 1230 → 2301 → 3012. Insgesamt werden hiermit 4 · 6 = 24 Figuren erfasst.

 0123	 0132	 0213	 0231
 0312	 0321		

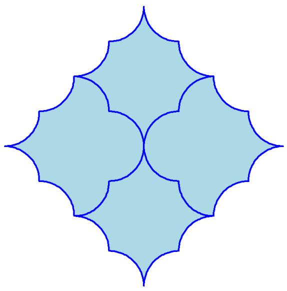
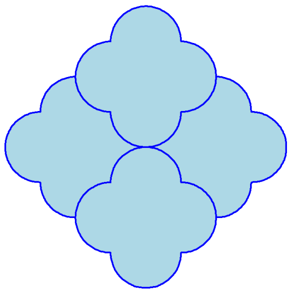
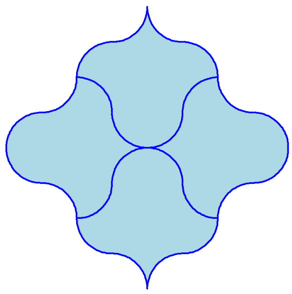
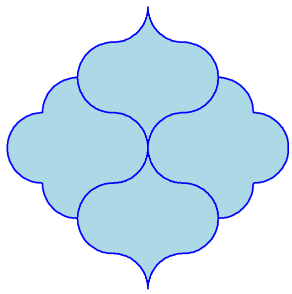
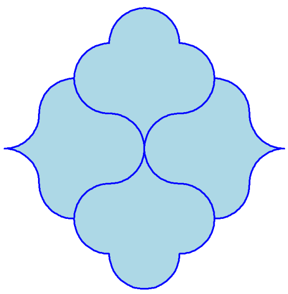
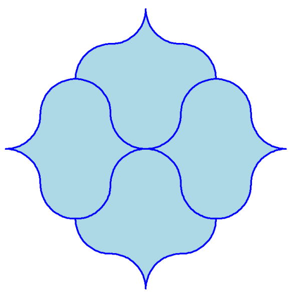
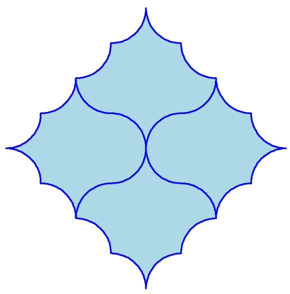
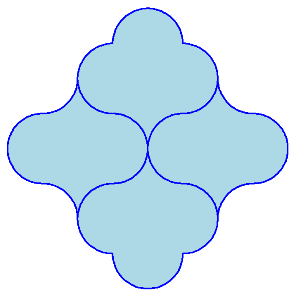
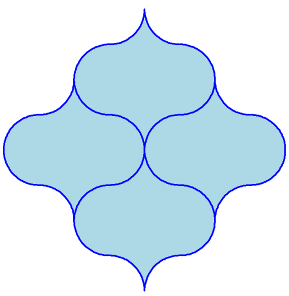
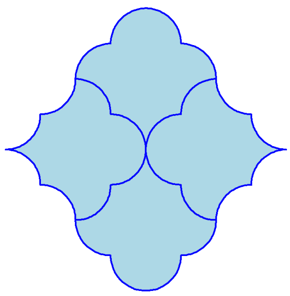
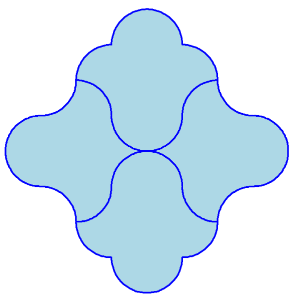
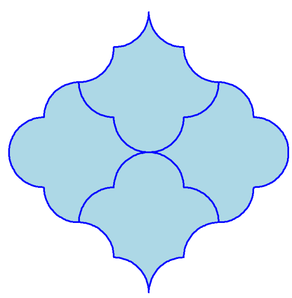
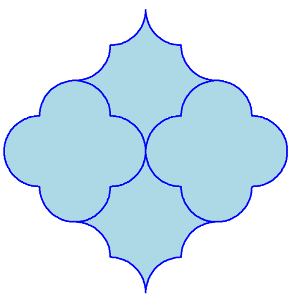
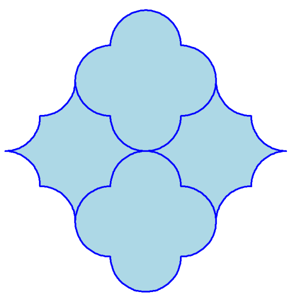
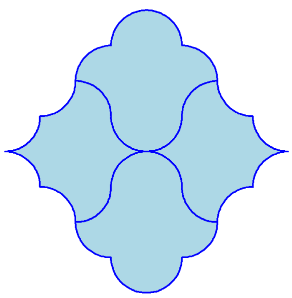
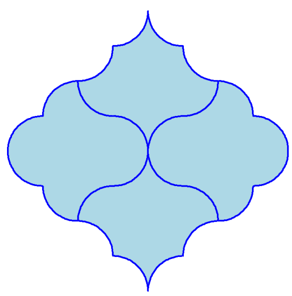
Insgesamt sind mit den abgebildeten 70 Grafiken alle 4 + 24 + 12 + 48 + 96 + 48 + 24 = 256 möglichen Kombinationen erfasst.

Projektaufträge

- Welche der 70 Figuren haben eine symmetrische Form?
- Welche Art der Symmetrie liegt dabei jeweils vor?
- Kann man die Symmetrieeigenschaft an der Typ-Bezeichnung im Vierer-System erkennen?
- Die Anzahl verschiedener Typen kann noch weiter reduziert werden, wenn man zwischen einer Figur und der gespiegelten Figur nicht unterscheidet (z. B. 2222 und 1111: Wenn man diese beiden Figuren ausschneidet, dann kann man sagen, die eine Figur ist die Oberseite, die andere die Unterseite desselben Puzzlestücks).
- Mit welchen Einzel-Figuren kann man die Ebene parkettieren? (Beispiel: 2222)
- Welche Paare von Figuren kann man kombinieren, sodass mit ausschließlich diesen Figuren die Ebene parkettiert werden kann? (Beispiel: Paar 3333 und 0000)

Besonders ansprechend sind Kombinationen von je zwei *symmetrischen* Figuren, wie sie in den folgenden Beispielen zusammengestellt sind. Diese Figuren lassen sich durch drei Parameter festlegen: Durch die ersten beiden Angaben sind die oben und unten liegenden Teilfiguren eindeutig bestimmt, aus dem dritten Parameterwert ergibt sich die Form der rechts und links liegenden Teilfiguren.

- Untersuchen Sie hier die Zusammenhänge und Abhängigkeiten. (Warum genügen zum Zeichnen der vier Teilfiguren drei Parameterwerte?)
- Welche Figuren sind aus vier identischen Teilfiguren zusammengesetzt?
- Welche der Figuren stimmen bis auf Drehung überein?

 000	 333	 111	 123
 322	 112	 020	 321
 121	 300	 311	 033
 003	 330	 310	 023