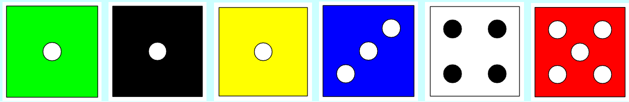
Überlegungen zum Spiel „Fiese 15“

Beim Spiel *Fiese 15* werden sechs verschiedenfarbige Würfel benutzt; außerdem gehören zum Spiel Karten mit der Angabe von Bedingungen, welche Augenzahlen man bei den einzelnen Würfeln *maximal* haben darf.

Beispiel einer Karte



Zum Namen des Spiels

Die Zahl *15* im Spiel-Namen wohl rührt daher, dass die Summe der Augenzahlen, die jeweils auf den Karten stehen, gleich 15 ist. Da es 18 Möglichkeiten gibt, die Zahl 15 als Summe von sechs Summanden aus der Menge {1, 2, 3, 4, 5, 6} darzustellen, könnte man 18 verschiedene Karten als Vorgaben für ein Spiel bereitstellen. (Bei der vor Jahren kommerziell angebotenen Variante des Spiels der Schmidt Spiele GmbH, wurden nur die 15 Karten mit den gelb unterlegten Summendarstellungen angeboten.)

(1) 1 + 1 + 1 + 1 + 5 + 6	(6) 1 + 1 + 1 + 2 + 5 + 5	(11) 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 5	(16) 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4
(2) 1 + 1 + 1 + 2 + 4 + 6	(7) 1 + 1 + 1 + 3 + 4 + 5	(12) 1 + 1 + 1 + 4 + 4 + 4	(17) 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 4
(3) 1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 6	(8) 1 + 1 + 2 + 2 + 4 + 5	(13) 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 4	(18) 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3
(4) 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 6	(9) 1 + 1 + 2 + 3 + 3 + 5	(14) 1 + 2 + 2 + 2 + 4 + 4	
(5) 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 6	(10) 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 5	(15) 1 + 1 + 3 + 3 + 3 + 4	

Spielregeln

Zunächst wird aus dem Kartenstapel zufällig eine Karte gezogen. Diese legt fest, welche Bedingungen für das nächste Spiel gelten.

In der 1. Runde dieses Spiels wirft man alle sechs Würfel. Jede Augenzahl, die einer Vorgabe auf der Karte entspricht, ist *gültig*. Wenn einer der Würfel oder wenn mehrere Würfel die Vorgabe erfüllen, *darf* man diese Würfel beiseite legen und damit diese gewürfelten Augenzahlen als Punkte vorläufig *sichern*.

In jeder Runde *muss* mindestens ein Würfel beiseite gelegt werden. Wenn keiner der Würfel eine gültige Augenzahl zeigt, hat man das Spiel verloren und die vorläufig gesicherten Punkte verfallen.

Ab der 2. Runde muss man also abwägen, ob man sich mit den gesicherten Punkten zufrieden gibt oder ob man weiterspielen möchte.

Beispiel (zur oben abgebildeten Karte)

Mindestens eine der folgenden Bedingungen muss erfüllt werden:

– Mit dem grünen, dem schwarzen oder dem gelben Würfel würfelt man Augenzahl 1.

– Mit dem blauen Würfel würfelt man eine der Augenzahlen 1, 2 oder 3.

– Mit dem weißen Würfel würfelt man irgendeine Augenzahl außer 5 und 6.

– Mit dem roten Würfel würfelt man eine beliebige Augenzahl unter 6.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine der Bedingungen durch die gewürfelte Augenzahl beim grünen, schwarzen oder gelben Würfel erfüllt ist, ist am kleinsten. Wenn man tatsächlich mit einem, mit zwei oder sogar mit allen drei Würfeln diese maximal zugelassene Augenzahl wirft, dann wird man diese Würfel aus dem Spiel nehmen und (jeweils) den *einen* Punkt sichern.

Man wird jedenfalls versuchen, eine möglichst hohe Punktzahl zu erreichen. Wenn beispielsweise mit dem weißen Würfel eine 1 gewürfelt wird, dann erhält man nur 1 Punkt. Man wird diesen Würfel wohl kaum sicherstellen, denn es ist ja eigentlich mehr möglich – es sei denn, man muss sich mit diesem *einen* Punkt begnügen, weil alle anderen Würfel die Bedingungen nicht erfüllen bzw. weil die Augenzahl auf dem roten Würfel noch ungünstiger erscheint.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spiel bereits nach der 1. Runde beendet ist?

Bei manchen Karten kann es passieren, dass das Spiel bereits nach dem ersten Würfeln, also nach der 1. Runde beendet ist.

Für die Karten (1) bis (5) gilt dies nicht, denn bei diesen ist mindestens eine der sechs Bedingungen erfüllt, nämlich die Bedingung „maximal Augenzahl 6“, d. h., die Wahrscheinlichkeit, dass bei diesen Karten das Spiel bereits nach dem ersten Wurf beendet ist, ist gleich null.

In den übrigen Fällen berechnet sich die Wahrscheinlichkeit, dass keine der Vorgaben erfüllt wird, gemäß der Pfadmultiplikationsregel wie folgt:

(6) 1 + 1 + 1 + 2 + 5 + 5	$p_6 = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{500}{46656} \approx 1{,}07\ \%$
(7) 1 + 1 + 1 + 3 + 4 + 5	$p_7 = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{750}{46656} \approx 1{,}61\ \%$
(8) 1 + 1 + 2 + 2 + 4 + 5	$p_8 = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{800}{46656} \approx 1{,}71\ \%$
(9) 1 + 1 + 2 + 3 + 3 + 5	$p_9 = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{900}{46656} \approx 1{,}93\ \%$
(10) 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 5	$p_{10} = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{960}{46656} \approx 2{,}06\ \%$
(11) 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 5	$p_{11} = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1024}{46656} \approx 2{,}19\ \%$
(12) 1 + 1 + 1 + 4 + 4 + 4	$p_{12} = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1000}{46656} \approx 2{,}14\ \%$
(13) 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 4	$p_{13} = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1200}{46656} \approx 2{,}57\ \%$
(14) 1 + 2 + 2 + 2 + 4 + 4	$p_{14} = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1280}{46656} \approx 2{,}74\ \%$
(15) 1 + 1 + 3 + 3 + 3 + 4	$p_{15} = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1350}{46656} \approx 2{,}89\ \%$
(16) 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4	$p_{16} = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1440}{46656} \approx 3{,}09\ \%$
(17) 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 4	$p_{17} = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1536}{46656} \approx 3{,}29\ \%$
(18) 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3	$p_{18} = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1728}{46656} \approx 3{,}70\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Spiel also bereits nach der 1. Runde beendet ist, berechnet sich (mithilfe der Pfadadditions- und Pfadmultiplikationsregel) zu

$$p = \frac{1}{18} \cdot \left(0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{500}{46656} + \ldots + \frac{1728}{46656}\right) \approx 1{,}72\ \%$$

Unterschiedliche Spielstrategien

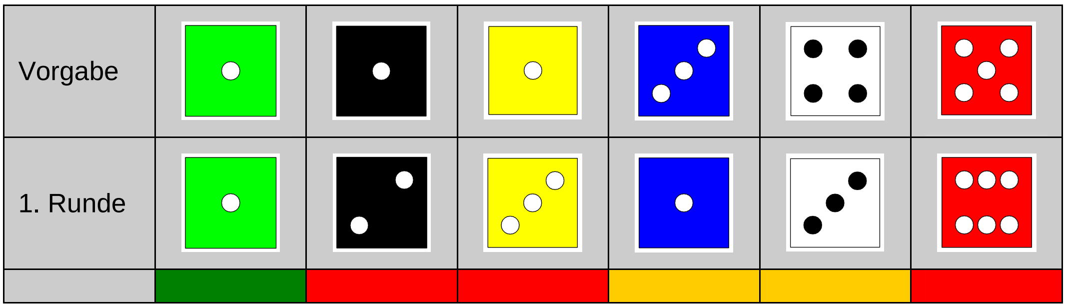
Aus den Spielregeln ergibt sich, dass ein Spiel aus maximal sechs Runden besteht (denn es muss ja nur jeweils eine der gewürfelten Augenzahlen gesichert werden). Nach jeder Runde muss überlegt werden, welche Entscheidung man trifft.

Die Erfahrung zeigt, dass Spieler nach unterschiedlichen Strategien vorgehen:

Vorsichtige Spieler vertreten oft den Standpunkt, dass alles, was passt, gesichert werden sollte (*was man hat, das hat man*). Mutigere versuchen, in den einzelnen Spielrunden immer möglichst viele Punkte zu erzielen; dabei vergleichen sie die Chancen bei unterschiedlichen Entscheidungsmöglichkeiten.

Solche Wahrscheinlichkeitsuntersuchungen sollen im Folgenden beispielgebunden durchgeführt werden.

Bleiben wir beim oben betrachteten Beispiel einer Kartenvorgabe, in der Zeile darunter ist ein Beispiel des Wurfs in der 1. Runde dargestellt.



Die Augenzahl des grünen Würfels kann nicht verbessert werden; die des weißen Würfels ist zumindest nicht schlecht; beim blauen Würfel könnte man sich durchaus mit dem *einen* Punkt zufrieden geben. Da die Augenzahlen beim schwarzen, beim gelben und beim roten Würfel *über* der Karten-Vorgabe liegen, müssen diese drei Würfel auf jeden Fall noch einmal geworfen werden, sofern man weiterspielen möchte.

Hier gibt es die folgenden (sinnvollen) Entscheidungsmöglichkeiten:

(1) Man würfelt nicht weiter, d. h., man sichert die Augenzahlen des grünen, des blauen und des weißen Würfels. Endergebnis: 1 + 1 + 3 = 5 Punkte.

(2) Man sichert nur die Punktzahl des grünen Würfels (Zwischenstand: 1 Punkt) und wirft alle übrigen Würfel (schwarz, gelb, blau, weiß, rot) noch einmal.

(3) Man sichert die Punktzahl des grünen und des weißen Würfels (Zwischenstand: 4 Punkte) und wirft alle übrigen Würfel (schwarz, gelb, blau, rot) noch einmal.

(4) Man sichert die Punktzahl des grünen und des blauen Würfels (Zwischenstand: 2 Punkte) und wirft alle übrigen Würfel (schwarz, gelb, weiß, rot) noch einmal.

(5) Man sichert die Punktzahl des grünen, des blauen und des weißen Würfels (Zwischenstand: 5 Punkte) und wirft die übrigen Würfel (schwarz, gelb, rot) noch einmal.

- **Option (5): Der schwarze, der gelbe und der rote Würfel werden noch einmal geworfen.**

Zunächst ermitteln wir die Wahrscheinlichkeit, dass *keine* der Augenzahlen der 2. Runde den Bedingungen entspricht. Dies kann mithilfe der Komplementärregel berechnet werden:

Das Gegenereignis von „(schwarz = 1) *oder* (gelb = 1) *oder* (rot ≤ 5)“ ist das Ereignis „(schwarz > 1) *und* (gelb > 1) *und* (rot = 6)“.

Dieses hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{216}\approx 11{,}6\,\%$, d. h., mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 11,6 % ist das Spiel bereits nach der 2. Runde beendet, und die 5 Punkte aus der 1. Runde sind verloren.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $1-\frac{25}{216}=\frac{191}{216}\approx 88{,}4\,\%$ kann das Spiel also auch nach der 2. Runde fortgesetzt werden.

Im Einzelnen können in der 2. Runde die in der folgenden Tabelle enthaltenen Ergebnisse auftreten.

schwarz	gelb	rot	Wahrscheinlichkeit	erreichte Punktzahl
1	1	1	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$	8
1	1	2	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$	9
1	1	3	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$	10
1	1	4	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$	11
1	1	5	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$	12
1	1	> 5	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$	7
> 1	1	1	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$	7
> 1	1	2	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$	8

schwarz	gelb	rot	Wahrscheinlichkeit	erreichte Punktzahl
1	> 1	1	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$	7
1	> 1	2	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$	8
1	> 1	3	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$	9
1	> 1	4	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$	10
1	> 1	5	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$	11
1	> 1	> 5	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$	6
> 1	> 1	1	$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$	6
> 1	> 1	2	$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$	7

> 1	1	3	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$	9
> 1	1	4	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$	10
> 1	1	5	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$	11
> 1	1	> 5	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$	6

> 1	> 1	3	$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$	8
> 1	> 1	4	$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$	9
> 1	> 1	5	$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$	10
> 1	> 1	> 5	$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$	0

Wie aus der folgenden Tabelle ersichtlich, wird der Spieler nach dem 2. Wurf im Mittel 7,25 Punkte erreicht haben, wenn er sich für Option (5) entschieden hat.

erreichte Punkte	0	6	7	8	9	10	11	12	
Wahrscheinlichkeit	$\frac{25}{216}$	$\frac{35}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{11}{216}$	$\frac{1}{216}$	
Berechnung des Erwartungswerts	0	$\frac{210}{216}$	$\frac{252}{216}$	$\frac{288}{216}$	$\frac{324}{216}$	$\frac{360}{216}$	$\frac{121}{216}$	$\frac{12}{216}$	$\frac{1567}{216}\approx 7{,}25$

- **Option (4): Der schwarze, gelbe, weiße und rote Würfel werden noch einmal geworfen.**

Zunächst ermitteln wir wieder die Wahrscheinlichkeit, dass keine der Augenzahlen der 2. Runde den Vorgaben entspricht. Das Gegenereignis von (schwarz = 1) *oder* (gelb = 1) *oder* (weiß ≤ 4) *oder* (rot ≤ 5) ist das Ereignis (schwarz > 1) *und* (gelb > 1) *und* (weiß > 4) *und* (rot = 6).

Dieses hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{50}{1296}\approx 3{,}9\ \%$, d. h., mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 3,9 % ist das Spiel nach der 2. Runde beendet, und die 2 Punkte aus der 1. Runde sind verloren. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $1-\frac{50}{1296}\approx 96{,}1\ \%$ kann das Spiel also auch nach der 2. Runde fortgesetzt werden.

Angenommen, der Spieler entscheidet sich also für Option (4); dann gibt es folgende Möglichkeiten:

Wenn der Spieler …

– mit dem weißen Würfel in der 2. Runde wieder eine 3 würfelt, dann entspricht die Verteilung der von Option (5);

– eine 2 würfelt, vermindert sich der Punktestand gegenüber diesem Stand um 1 Punkt;

– eine 1 würfelt, vermindert sich der Punktestand um 2 Punkte;

– Augenzahl 4 würfelt, erhöht sich der Punktestand um 1 Punkt;

– eine größere Augenzahl als 4 würfelt, vermindert sich der Punktestand um 3 Punkte.

weiß	W.	0	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
3	$\frac{1}{6}$				$\frac{25}{216}$	$\frac{35}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{11}{216}$	$\frac{1}{216}$		
2	$\frac{1}{6}$			$\frac{25}{216}$	$\frac{35}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{11}{216}$	$\frac{1}{216}$			
1	$\frac{1}{6}$		$\frac{25}{216}$	$\frac{35}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{11}{216}$	$\frac{1}{216}$				
4	$\frac{1}{6}$					$\frac{25}{216}$	$\frac{35}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{11}{216}$	$\frac{1}{216}$	
5, 6	$\frac{2}{6}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{35}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{11}{216}$	$\frac{1}{216}$					
gesamt		$\frac{50}{1296}$	$\frac{95}{1296}$	$\frac{132}{1296}$	$\frac{168}{1296}$	$\frac{204}{1296}$	$\frac{215}{1296}$	$\frac{166}{1296}$	$\frac{121}{1296}$	$\frac{84}{1296}$	$\frac{48}{1296}$	$\frac{12}{1296}$	$\frac{1}{1296}$	
Erwart.		0	$\frac{285}{1296}$	$\frac{528}{1296}$	$\frac{840}{1296}$	$\frac{1224}{1296}$	$\frac{1505}{1296}$	$\frac{1328}{1296}$	$\frac{1089}{1296}$	$\frac{840}{1296}$	$\frac{528}{1296}$	$\frac{144}{1296}$	$\frac{13}{1296}$	$\frac{8324}{1296}\approx 6{,}42$

Ergebnis: Wählt der Spieler Option (4), dann wird er nach dem 2. Wurf im Mittel 6,42 Punkte erreicht haben, also weniger als bei Option (5).

Dies ist auch ohne Rechnung plausibel, weil die Wahrscheinlichkeit, den vorhandenen Punktstand zu erhöhen, kleiner ist, als diesen zu verringern.

- **Option (3): Der schwarze, gelbe, blaue und rote Würfel werden noch einmal geworfen.**

Zunächst ermitteln wir wieder die Wahrscheinlichkeit, dass keine der Augenzahlen der 2. Runde den Vorgaben entspricht. Das Gegenereignis von (schwarz = 1) *oder* (gelb = 1) *oder* (blau ≤ 3) *oder* (rot ≤ 5) ist das Ereignis (schwarz > 1) *und* (gelb > 1) *und* (blau > 3) *und* (rot = 6).

Dieses hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{75}{1296} \approx 5{,}8\ \%$, d. h., mit einer Wahrscheinlichkeit von 5,8 % ist das Spiel nach der 2. Runde beendet, und die 2 Punkte aus der 1. Runde sind verloren. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \frac{75}{1296} \approx 94{,}2\ \%$ kann das Spiel auch nach der 2. Runde fortgesetzt werden.

Angenommen, der Spieler entscheidet sich also für Option (3); dann gibt es folgende Möglichkeiten:

Wenn der Spieler …

– mit dem blauen Würfel wieder eine 1 würfelt, dann entspricht die Verteilung der von Option (5);

– eine 2 würfelt, erhöht sich der Punktestand gegenüber diesem Stand um 1;

– eine 3 würfelt, erhöht sich der Punktestand um 2 Punkte;

– eine größere Augenzahl als 3 gewürfelt wird, vermindert sich der Punktestand um 1 Punkt.

blau	W.	0	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
1	$\frac{1}{6}$		$\frac{25}{216}$	$\frac{35}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{11}{216}$	$\frac{1}{216}$			
2	$\frac{1}{6}$			$\frac{25}{216}$	$\frac{35}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{11}{216}$	$\frac{1}{216}$		
3	$\frac{1}{6}$				$\frac{25}{216}$	$\frac{35}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{11}{216}$	$\frac{1}{216}$	
4, 5, 6	$\frac{3}{6}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{35}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{11}{216}$	$\frac{1}{216}$				
gesamt		$\frac{75}{1296}$	$\frac{130}{1296}$	$\frac{168}{1296}$	$\frac{204}{1296}$	$\frac{215}{1296}$	$\frac{216}{1296}$	$\frac{141}{1296}$	$\frac{86}{1296}$	$\frac{48}{1296}$	$\frac{12}{1296}$	$\frac{1}{1296}$	
Erwart.		0	$\frac{650}{1296}$	$\frac{1008}{1296}$	$\frac{1428}{1296}$	$\frac{1720}{1296}$	$\frac{1944}{1296}$	$\frac{1410}{1296}$	$\frac{946}{1296}$	$\frac{576}{1296}$	$\frac{156}{1296}$	$\frac{14}{1296}$	$\frac{9852}{1296} \approx 7{,}60$

Ergebnis: Wählt der Spieler Option (3), dann wird er nach dem 2. Wurf im Mittel 7,60 Punkte erreicht haben, also Mittel eine etwas höhere Punktzahl als bei Option (5).

Dies ist auch ohne Rechnung plausibel, weil die Wahrscheinlichkeit, den vorhandenen Punktstand zu erhöhen, größer ist, als diesen zu verringern.

- **Option (2): Der schwarze, gelbe, blaue, weiße und rote Würfel werden noch einmal geworfen.**

Zunächst ermitteln wir wieder die Wahrscheinlichkeit, dass keine der Augenzahlen der 2. Runde den Vorgaben entspricht. Das Gegenereignis von (schwarz = 1) *oder* (gelb = 1) *oder* (blau ≤ 3) *oder* (weiß ≤ 4) *oder* (rot ≤ 5) ist das Ereignis (schwarz > 1) *und* (gelb > 1) *und* (blau > 3) *und* (weiß > 4) *und* (rot = 6).

Dieses hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{150}{7776} \approx 1{,}9\ \%$, d. h., nur mit der ziemlich kleinen Wahrscheinlichkeit von 1,9 % kann man das Spiel nach der 2. Runde nicht fortsetzen, und der eine Punkt aus der 1. Runde ist verloren. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \frac{150}{7776} \approx 98{,}1\ \%$ kann das Spiel also auch nach der 2. Runde fortgesetzt werden.

Die genaue Untersuchung der Option (2) sei der Leserin/dem Leser überlassen. Auch hier können die Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen von Option (5) mit berücksichtigt werden.

Je nachdem, welche Augenzahlen der blaue bzw. der weiße Würfel zeigen, kann sich die Punktzahl um 1, 2 oder 3 Punkte erhöhen, sie kann gleich bleiben oder sie kann kleiner werden. Die möglichen Fälle können der folgenden Tabelle entnommen werden.

Da man sich jedoch bei der überwiegenden Zahl der Fälle verschlechtern würde, empfiehlt sich diese Option nicht.

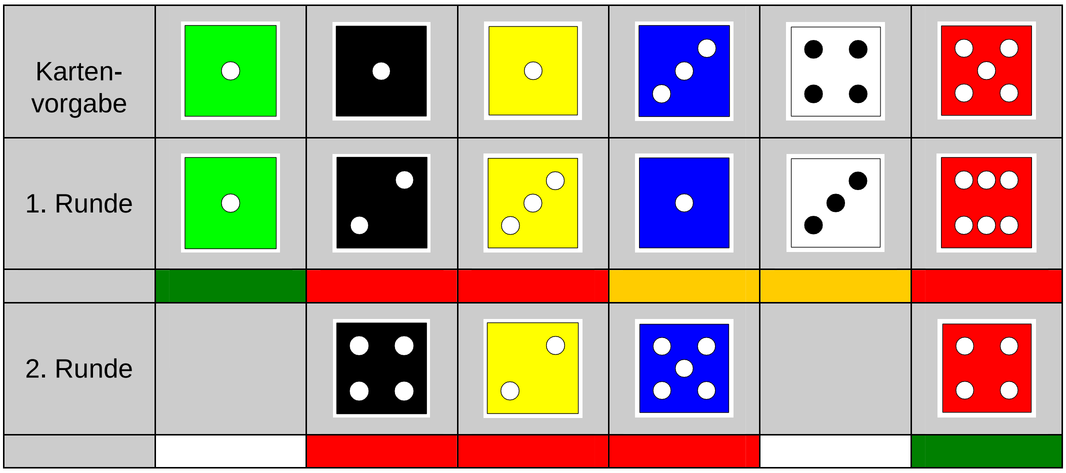
weiß→ / ↓blau	1	2	3	4	5	6
1	-2	-1	±0	+1	-3	-3
2	-1	±0	+1	+2	-2	-2
3	±0	+1	+2	+3	-1	-1
4	-3	-2	-1	±0	-4	-4
5	-3	-2	-1	±0	-4	-4
6	-3	-2	-1	±0	-4	-4

Beispiel, wie das Spiel weiterverlaufen könnte

Gemäß der Option (3) wird also in der 2. Runde der schwarze, gelbe, blaue und rote Würfel geworfen. Zwischenstand nach der 1. Runde: 1 + 3 = 4 Punkte.

Diesmal erfüllt nur einer der vier Würfel die Bedingungen, nämlich der rote Würfel, und da mindestens eine der gewürfelten Augenzahlen gesichert werden muss, legt der Spieler jetzt den roten Würfel beiseite.

Nach der 2. Runde hat der Spieler also einen Punktestand von 1 + 4 + 4 = 9 Punkten erreicht.



Soll man weiterspielen? Oder aufhören?

In der 3. Runde müsste man den schwarzen, den gelben und den blauen Würfel werfen. Die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens eine der drei durch die Karte vorgegebenen Bedingungen erfüllen wird, kann man wieder mithilfe der Komplementärregel ermitteln:

Das Gegenereignis von (schwarz = 1) *oder* (gelb = 1) *oder* (blau ≤ 3) ist das Ereignis (schwarz > 1) *und* (gelb > 1) *und* (blau > 3). Dieses Gegenereignis hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{75}{216} \approx 34{,}7\,\%$, d. h., mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 65,3 % wird man in der 3. Runde mit mindestens einem der drei verbleibenen Würfel die Karten-Bedingung erfüllen.

Man kann dies auch so formulieren: Die Chancen stehen 2 : 1, dass man in der 3. Runde seinen Punktestand noch einmal verbessern kann.

Wie oben erwähnt, gibt es Spieler, für die das Risiko, die bereits gesicherten Punkte zu verlieren, zu groß ist, die vielleicht erst dann noch einmal würfeln, wenn die Chancen 4 : 1 stehen.

Eine detaillierte Untersuchung der Situation zeigt, dass eine schematische Entscheidung (… *da die Chancen für eine Punktverbesserung größer als 50 % sind, würfle ich weiter* …) auf lange Sicht nicht günstig erscheint: Mit dieser Strategie wird man sich nicht immer verbessern!

schwarz	gelb	blau	Wahrscheinlichkeit	erreichte Punktzahl
1	1	1	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$	12
1	1	2	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$	13
1	1	3	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$	14
1	1	> 3	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{3}{216}$	11
> 1	1	1	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$	11
> 1	1	2	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$	12
> 1	1	3	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$	13
> 1	1	> 3	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{15}{216}$	10

schwarz	gelb	blau	Wahrscheinlichkeit	erreichte Punktzahl
1	> 1	1	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$	11
1	> 1	2	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$	12
1	> 1	3	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$	13
1	> 1	> 3	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{15}{216}$	10
> 1	> 1	1	$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$	10
> 1	> 1	2	$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$	11
> 1	> 1	3	$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$	12
> 1	> 1	> 3	$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{75}{216}$	0

Erwartungswertbestimmung:

erreichte Punkte	0	10	11	12	13	14	
Wahrscheinlichkeit	$\frac{75}{216}$	$\frac{55}{216}$	$\frac{38}{216}$	$\frac{36}{216}$	$\frac{11}{216}$	$\frac{1}{216}$	
Berechnung des Erwartungswerts	0	$\frac{550}{216}$	$\frac{418}{216}$	$\frac{432}{216}$	$\frac{143}{216}$	$\frac{14}{216}$	$\frac{1157}{216}\approx 7{,}21$

Zusatzregeln: In der Spielanleitung gibt es noch zusätzliche Regeln, durch die sich die strategischen Überlegungen verändern können. Die Leserin/der Leser möge sich dann selbst klar machen, an welchen Stellen der o. a. Tabellen welche Änderungen vorgenommen werden müssen.

- Man erhält 5 Zusatzpunkte, wenn die Augenzahlen auf fünf der sechs Würfel den vorgegebenen Bedingungen entsprechen.
- Die Punktzahl wird verdoppelt, wenn die Augenzahlen auf allen sechs Würfeln den Kartenvorgaben entsprechen.