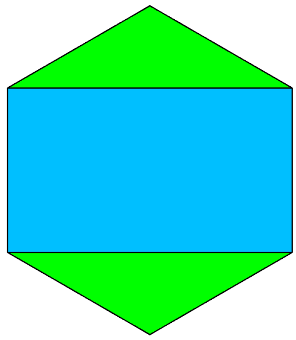
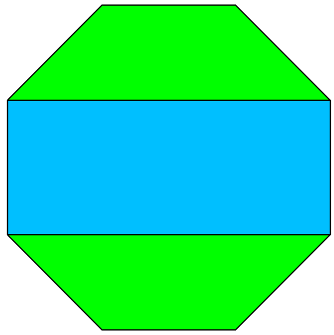
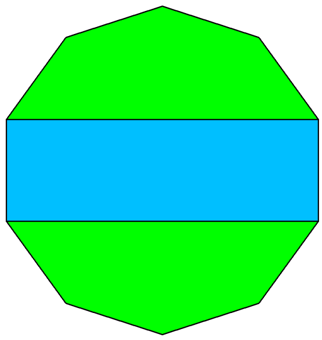
Problem des Monats November 2018

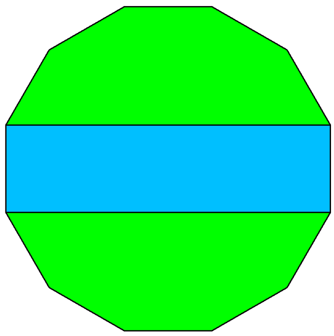
In einem regelmäßigen 2*n*-Eck ($n \geq 3$) kann man durch Verbinden zweier gegenüberliegender Seiten ein Rechteck erzeugen, vgl. rechts.

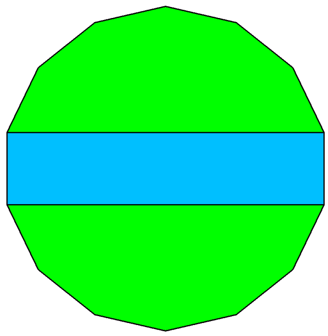
Welchen Flächenanteil hat dieses Rechteck?





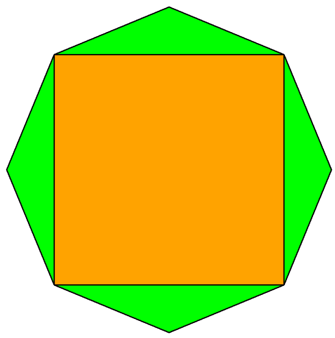


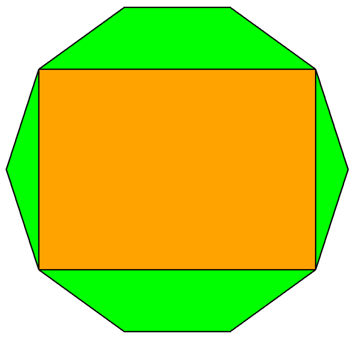


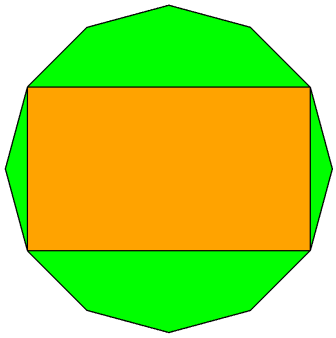


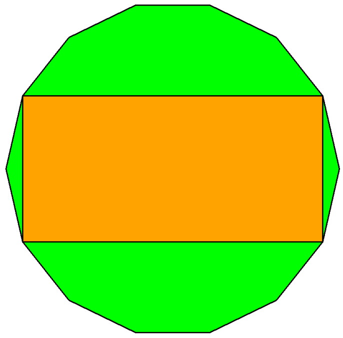
In einem regelmäßigen 2*n*-Eck ($n \geq 4$) kann man durch Verbinden zweier kurzer gegenüberliegender Diagonalen* ein Rechteck erzeugen, vgl. rechts.

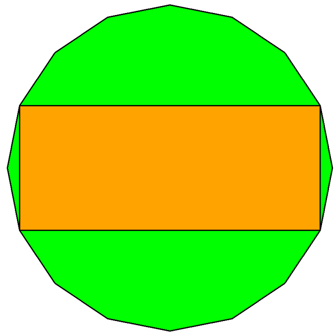
Welchen Flächenanteil hat dieses Rechteck?







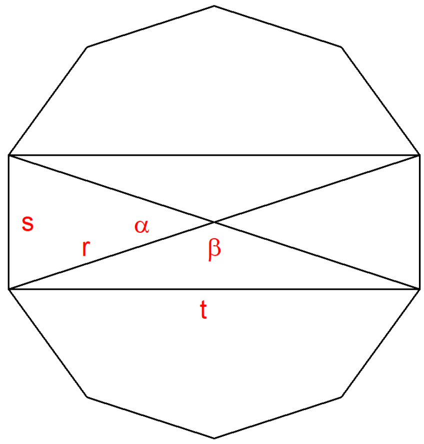




*) In den dargestellten Beispielen sind für die Rechtecke jeweils die kürzest-möglichen Diagonalen betrachtet worden, also diejenigen, die man erhält, wenn man einen Eckpunkt mit dem übernächsten verbindet.

Wenn man die Aufgabe für diese Fragestellung gelöst hat, ist die Verallgemeinerung leicht …

Lösung



Der Einfachheit halber sprechen wir im Folgenden von einem regelmäßigen *n*-Eck mit geradem *n*.

Der Mittelpunkt und je zwei benachbarte Eckpunkte eines regelmäßigen *n*-Ecks bilden ein gleichschenkliges Dreieck mit $\alpha = 360°/n$ mit $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{s}{2r}$, also

$$s = 2r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Entsprechend gilt für das gleichschenklige Dreieck mit $\beta = 180° - \alpha$: $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{t}{2r}$, also

$$t = 2r \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = 2r \cdot \sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 2r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Die Rechtecke haben also einen Flächeninhalt von

$$A_R = 2r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 2r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2r^2 \cdot \sin(\alpha).$$

Der Flächeninhalt des regelmäßigen *n*-Ecks berechnet sich zu

$$A = n \cdot \tfrac{1}{2} \cdot s \cdot \tfrac{1}{2} \cdot t = \tfrac{1}{4} \cdot n \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 2r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \tfrac{1}{4} \cdot n \cdot 2r^2 \cdot \sin(\alpha).$$

Der Flächenanteil des Rechtecks am regelmäßigen *n*-Eck beträgt also

$$\frac{A_R}{A} = \frac{2r^2 \cdot \sin(\alpha)}{\frac{1}{4} \cdot n \cdot 2r^2 \cdot \sin(\alpha)} = \frac{4}{n}.$$

So erhält man beim regelmäßigen

- 6-Eck den Anteil $\frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 67\,\%$,
- 8-Eck den Anteil $\frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 50\,\%$,
- 10-Eck den Anteil $\frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 40\,\%$,
- 12-Eck den Anteil $\frac{4}{12} = \frac{1}{3} \approx 33\,\%$,
- 14-Eck den Anteil $\frac{4}{14} = \frac{2}{7} \approx 29\,\%$,

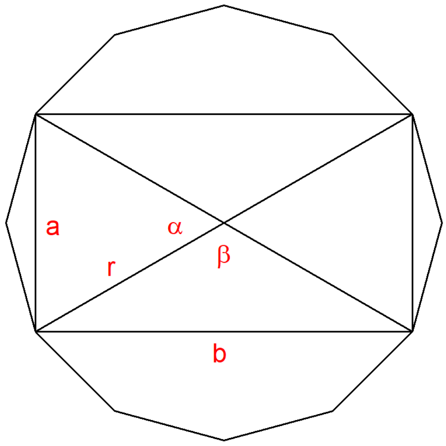
usw.

Das war die komplizierte Lösung; es geht auch einfacher:

Die im Rechteck eingezeichneten Diagonalen zerlegen das Rechteck in vier gleich große Teilflächen (Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot s \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot t\right)$ bzw. $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot s\right) \cdot t$).

Das regelmäßige *n*-Eck setzt sich aus *n* gleichschenkligen Dreiecken mit Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot s \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot t\right)$ zusammen, das sind insgesamt also *n*/4-mal so viele wie im Rechteck.

Im zweiten Teil der Aufgabe gilt nunmehr
$\alpha = 2 \cdot 360°/n = 720°/n$ und (analog zu oben)



$a = 2r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ sowie $b = 2r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Die Rechtecke haben hier also einen Flächeninhalt von
$A_R = a \cdot b = 2r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 2r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2r^2 \cdot \sin(\alpha)$.

Da hier aber α doppelt so groß ist wie im ersten Teil der Aufgabe, gilt jetzt $A = \frac{1}{4} \cdot n \cdot 2r^2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Für den Flächenanteil ergibt sich daher

$$\frac{A_R}{A} = \frac{4r^2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{1}{4} \cdot n \cdot 2r^2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{8 \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{n} = \frac{8}{n} \cdot \cos\left(\frac{360°}{n}\right)$$ oder auch

$$\frac{A_R}{A} = \frac{2r^2 \cdot \sin(\alpha)}{\frac{1}{4} \cdot n \cdot 2r^2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{4 \cdot \sin\left(\frac{720°}{n}\right)}{n \cdot \sin\left(\frac{360°}{n}\right)}.$$

So erhält man beim regelmäßigen

- 8-Eck den Anteil von ca. 70,7 %,
- 10-Eck den Anteil von ca. 64,7 %,
- 12-Eck den Anteil von ca. 57,7 %,
- 14-Eck den Anteil von ca. 51,5 %,
- 16-Eck den Anteil von ca. 46,2 %

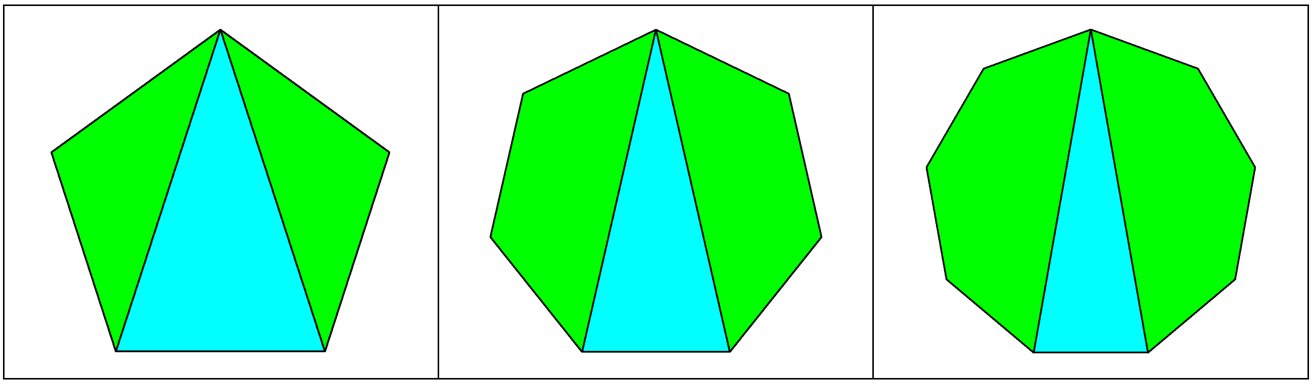
usw.

Verallgemeinert man die Aufgabenstellung und geht im nächsten Schritt über zu den Diagonalen, die man erhält, wenn man einen Eckpunkt mit dem *drittnächsten* verbindet (möglich ab dem regelmäßigen 12-Eck, beginnend mit einem Quadrat), dann kann im Prinzip die gleiche Skizze verwendet werden, wobei allerdings $\alpha = 3 \cdot 360°/n$ und daher

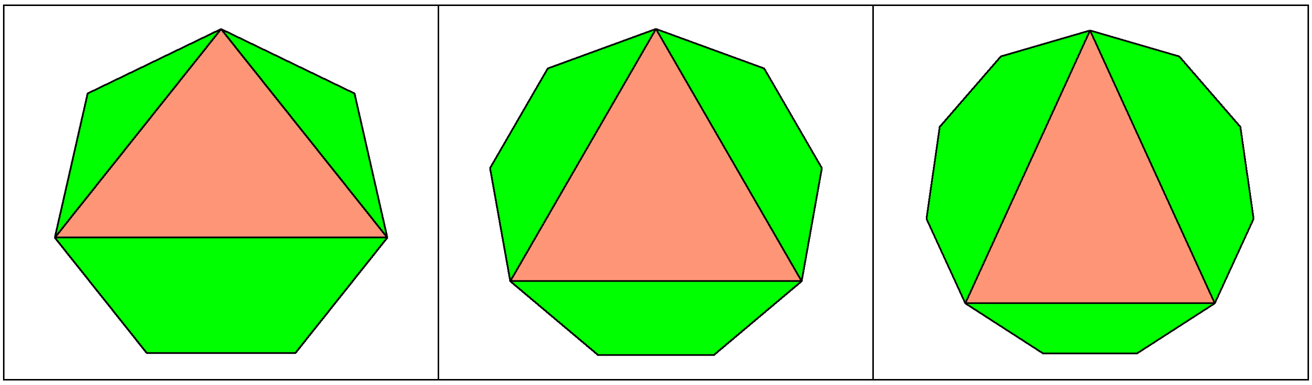
$$\frac{A_R}{A} = \frac{4r^2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{1}{4} \cdot n \cdot 2r^2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)} = \frac{8 \cdot \sin\left(\frac{540°}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{540°}{n}\right)}{n \cdot \sin\left(\frac{360°}{n}\right)} = \frac{4 \cdot \sin\left(\frac{1080°}{n}\right)}{n \cdot \sin\left(\frac{360°}{n}\right)}$$

usw.

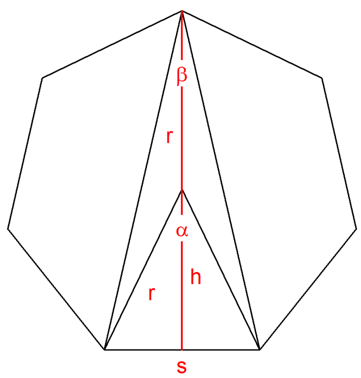
Themen-Variation für regelmäßige *n*-Ecke mit *ungeradem n*:



und weiter …



… und für die Lösung gibt es ebenfalls eine einfache Hilfsfigur:



Bei der ersten Bilder-Serie ist α = 360°/*n* und es gilt

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{s}{2r}$ und $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{h}{r}$, also gilt für den Flächeninhalt des gefärbten Dreiecks

$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot s \cdot (r+h) = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cdot \left(r + r \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right) = r^2 \cdot \left(\sin\left(\frac{180°}{n}\right) + \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right)$, also

$A_\Delta = r^2 \cdot \left(\sin\left(\frac{180°}{n}\right) + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{360°}{n}\right)\right)$

Mit $A = \frac{1}{4} \cdot n \cdot 2r^2 \cdot \sin\left(\frac{360°}{n}\right)$, vgl. oben, ergibt sich ein Flächenanteil von

$$\frac{A_\Delta}{A} = \frac{r^2 \cdot \left(\sin\left(\frac{180°}{n}\right) + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{360°}{n}\right)\right)}{\frac{1}{4} \cdot n \cdot 2r^2 \cdot \sin\left(\frac{360°}{n}\right)} = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right)}{n \cdot \sin\left(\frac{360°}{n}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{360°}{n}\right)}{n \cdot \sin\left(\frac{360°}{n}\right)} = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right)}{n \cdot \sin\left(\frac{360°}{n}\right)} + \frac{1}{n}$$

So erhält man beim regelmäßigen

- 5-Eck den Anteil von ca. 44,7 %,
- 7-Eck den Anteil von ca. 30,1 %,
- 9-Eck den Anteil von ca. 22,9 %

usw.

Bei der zweiten Bilder-Serie ist $\alpha = 3 \cdot 360°/n = 1080°/n$, entsprechend

$A_\Delta = r^2 \cdot \left(\sin\left(\frac{540°}{n}\right) + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{1080°}{n}\right)\right)$ und daher

$$\frac{A_\Delta}{A} = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{540°}{n}\right) + \sin\left(\frac{1080°}{n}\right)}{n \cdot \sin\left(\frac{360°}{n}\right)}$$

Dann erhält man beim regelmäßigen

- 7-Eck den Anteil von ca. 43,6 %,
- 9-Eck den Anteil von ca. 44,9 %,
- 11-Eck den Anteil von ca. 42,1 %

usw.