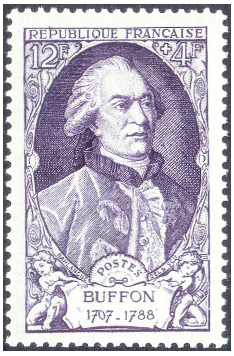
Problem des Monats Oktober 2018

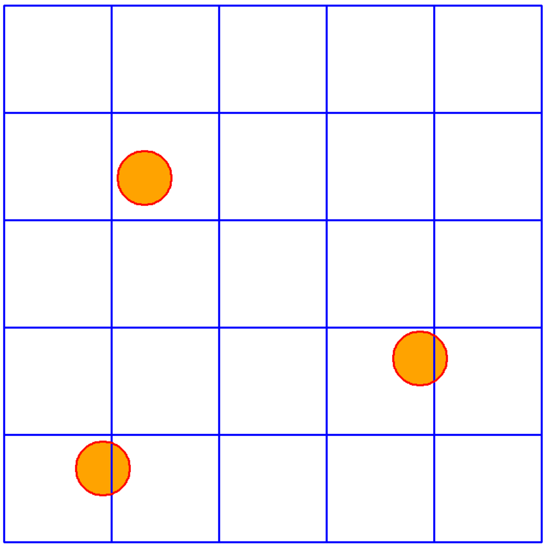


Von Georges-Louis Leclerc Comte de Buffon (1707 – 1788) stammt die Idee zu einem Spiel, das er *franc-carreau* nannte.

Bei diesem Spiel geht es darum, eine Münze mit Radius *r* zufällig auf ein Feld mit quadratischem Fliesenmuster (Fliesenbreite *a*) zu werfen.

Der eine Spielteilnehmer wettet darauf, dass die Münze vollständig in einem quadratischen Feld liegen bleibt, der andere, dass mindestens eine der Trennlinien zwischen den quadratischen Feldern von der Münze bedeckt wird.

- Bei welcher Fliesengröße haben beide Spieler gleiche Gewinnchancen, d. h., unter welchen Bedingungen handelt es sich um ein faires Spiel?
- Welche Seitenlänge müssten die Quadrate des Fliesenmusters haben, wenn man mit EURO-Münzen ein faires Spiel machen möchte?



Buffon erkannte als Erster, dass es bei der Bestimmung der Gewinnwahrscheinlichkeiten auf die Größe von Flächen ankommt.

Übrigens: Buffon wurde aufgrund seines Beitrags *Mémoire sur le jeu de franc-carreau* bereits im Alter von 26 Jahren als Mitglied in die *Académie des Sciences* gewählt.

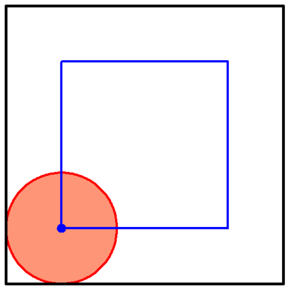
Berühmt wurde er als Herausgeber (zusammen mit Louis Jean-Marie Daubenton) der 50-bändigen *Histoire naturelle, générale et particulière* (Allgemeine Historie der Natur), die sich mit der Entstehung der Erde und der Mineralien, mit der Entwicklung der Organismen und insbesondere der verschiedenen Tierarten beschäftigte.

Lösung:

Wenn der Mittelpunkt der Münze im Inneren eines Quadrats der Seitenlänge x liegt (blauer Rand), gewinnt der erste Spieler. Wenn

Der Rand dieses Quadrats hat vom Fliesenrand den Abstand r.

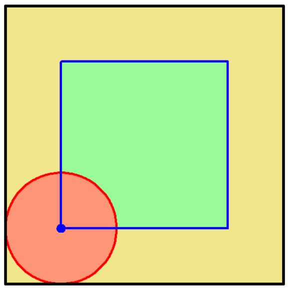
Also gilt: $x + 2r = a$.



Das Spiel ist fair, wenn das innere Quadrat (grün) und der Randstreifen (gelb) um das innere Quadrat gleich groß sind, d. h.,

wenn der Flächeninhalt des inneren Quadrates halb so groß ist wie der Flächeninhalt der Fliese, also wenn gilt

$x^2 = \frac{1}{2} a^2$.



Eingesetzt und umgeformt ergibt sich

$$x^2 = \tfrac{1}{2} \cdot (x + 2r)^2 \Leftrightarrow x^2 = \tfrac{1}{2} x^2 + 2rx + 2r^2 \Leftrightarrow \tfrac{1}{2} x^2 - 2rx + 2r^2 \Leftrightarrow (x - 2r)^2 = 8r^2 \Leftrightarrow x = (2 + \sqrt{8}) \cdot r \approx 4{,}83 \cdot r \,,$$

also $a = (4 + \sqrt{8}) \cdot r = (2 + \sqrt{2}) \cdot d \approx 3{,}41 \cdot d$

Für die im Umlauf befindlichen EURO-Münzen errechnen sich folgende Fliesengrößen für ein faires Spiel:

	2 €	1 €	0,50 €	0,20 €	0,10 €	0,05 €	0,02 €	0,01 €
d (in cm)	2,575	2,325	2,425	2,225	1,975	2,125	1,875	1,625
a (in cm)	8,792	7,938	8,280	7,597	6,743	7,255	6,487	5,548