Veranschaulichung des Primzahlsatzes von Dirichlet

Bei Wikipedia findet man den folgenden Text:

> Der **dirichletsche Primzahlsatz** (nach P. G. L. Dirichlet) ist eine Aussage aus dem mathematischen Teilgebiet der Zahlentheorie, der besagt, dass eine arithmetische Folge unendlich viele Primzahlen enthält, wenn dies nicht aus trivialen Gründen unmöglich ist.
>
> In der einfachsten Fassung lautet der Satz: Es sei m eine natürliche Zahl und a eine zu m teilerfremde natürliche Zahl. Dann enthält die arithmetische Folge
>
> $$a, a+m, a+2m, a+3m, \ldots$$
>
> unendlich viele Primzahlen. Anders formuliert: Es gibt unendlich viele Primzahlen, die kongruent zu a modulo m sind.
>
> Wären a und m nicht teilerfremd und $g > 1$ ein gemeinsamer Teiler, so wäre jedes Folgenglied durch g teilbar; zwei verschiedene Primzahlen können aber nicht beide durch g teilbar sein. Deshalb ist die Bedingung der Teilerfremdheit von a und m notwendig.
>
> Jede ungerade natürliche Zahl hat die Form $4k+1$ oder $4k+3$ mit einer nichtnegativen ganzen Zahl k. Der dirichletsche Primzahlsatz sagt in diesem Spezialfall aus, dass es von beiden Formen jeweils unendlich viele Primzahlen gibt.
>
> Bezogen auf das Dezimalsystem sagt der Satz aus, dass es jeweils unendlich viele Primzahlen gibt, die im Dezimalsystem auf eine 1, auf eine 3, auf eine 7 und auf eine 9 enden. Allgemeiner kann man sagen: Gibt es zwei verschiedene Primzahlen, die in einem Zahlensystem auf die gleiche Ziffernfolge enden, so gibt es unendlich viele weitere Primzahlen, die in diesem Zahlensystem auf diese Ziffernfolge enden.

Zur Verdeutlichung der Aussage des Satzes sind in den folgenden Tabellen die ersten natürlichen Zahlen entsprechend ihrem Rest bzgl. der Division aufgeführt. Die Spalten mit *a* mod *m*, für die ggT(*a* ; *m*) = 1 gilt, enthalten *unendlich viele* Primzahlen (die Primzahl-Felder sind blau unterlegt; die restlichen Felder in dieser Spalte wurden weiß gelassen); die übrigen Spalten enthalten *höchstens eine* Primzahl (Feld blau unterlegt; die restlichen Felder in dieser Spalte wurden gelb gefärbt).

1 mod 2	0 mod 2
1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34
35	36
37	38
39	40

1 mod 3	2 mod 3	0 mod 3
1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
22	23	24
25	26	27
28	29	30
31	32	33
34	35	36
37	38	39
40	41	42
43	44	45
46	47	48
49	50	51
52	53	54
55	56	57
58	59	60

1 mod 4	2 mod 4	3 mod 4	0 mod 4
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20
21	22	23	24
25	26	27	28
29	30	31	32
33	34	35	36
37	38	39	40
41	42	43	44
45	46	47	48
49	50	51	52
53	54	55	56
57	58	59	60
61	62	63	64
65	66	67	68
69	70	71	72
73	74	75	76
77	78	79	80

1 mod 5	2 mod 5	3 mod 5	4 mod 5	0 mod 5
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45
46	47	48	49	50
51	52	53	54	55
56	57	58	59	60
61	62	63	64	65
66	67	68	69	70
71	72	73	74	75
76	77	78	79	80
81	82	83	84	85
86	87	88	89	90
91	92	93	94	95
96	97	98	99	100

1 mod 6	2 mod 6	3 mod 6	4 mod 6	5 mod 6	0 mod 6
1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120

1 mod 7	2 mod 7	3 mod 7	4 mod 7	5 mod 7	6 mod 7	0 mod 7
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97	98
99	100	101	102	103	104	105
106	107	108	109	110	111	112
113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126
127	128	129	130	131	132	133
134	135	136	137	138	139	140

1 mod 8	2 mod 8	3 mod 8	4 mod 8	5 mod 8	6 mod 8	7 mod 8	0 mod 8
1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64
65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88
89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104
105	106	107	108	109	110	111	112
113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128
129	130	131	132	133	134	135	136
137	138	139	140	141	142	143	144
145	146	147	148	149	150	151	152
153	154	155	156	157	158	159	160

1 mod 9	2 mod 9	3 mod 9	4 mod 9	5 mod 9	6 mod 9	7 mod 9	8 mod 9	0 mod 9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81
82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114	115	116	117
118	119	120	121	122	123	124	125	126
127	128	129	130	131	132	133	134	135
136	137	138	139	140	141	142	143	144
145	146	147	148	149	150	151	152	153
154	155	156	157	158	159	160	161	162
163	164	165	166	167	168	169	170	171
172	173	174	175	176	177	178	179	180

1 mod 10	2 mod 10	3 mod 10	4 mod 10	5 mod 10	6 mod 10	7 mod 10	8 mod 10	9 mod 10	0 mod 10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

1 mod 11	2 mod 11	3 mod 11	4 mod 11	5 mod 11	6 mod 11	7 mod 11	8 mod 11	9 mod 11	10 mod 11	0 mod 11
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88
89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121
122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143
144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154
155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165
166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176
177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187
188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198
199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209
210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220

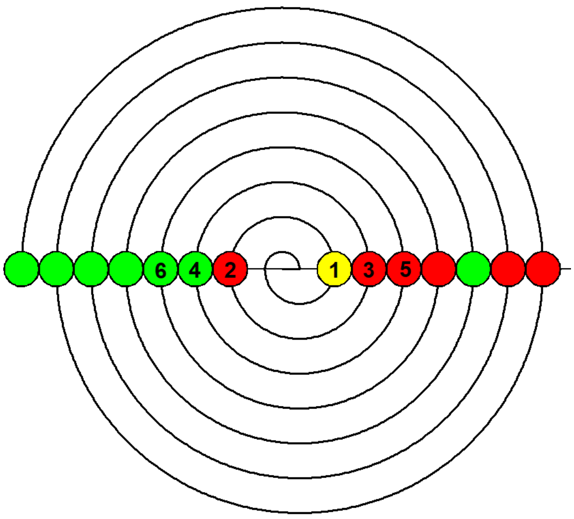
1 mod 12	2 mod 12	3 mod 12	4 mod 12	5 mod 12	6 mod 12	7 mod 12	8 mod 12	9 mod 12	10 mod 12	11 mod 12	0 mod 12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144
145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156
157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168
169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192
193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204
205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216
217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228
229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240

Die natürlichen Zahlen sind in diesen Tabellen fortlaufend von links nach rechts eingetragen; wenn man am Ende der Zeile angekommen ist, springt man wieder an den Anfang der nächsten Zeile. Die unendliche Folge der Zahlen wird auf Zeilen „umgebrochen“.

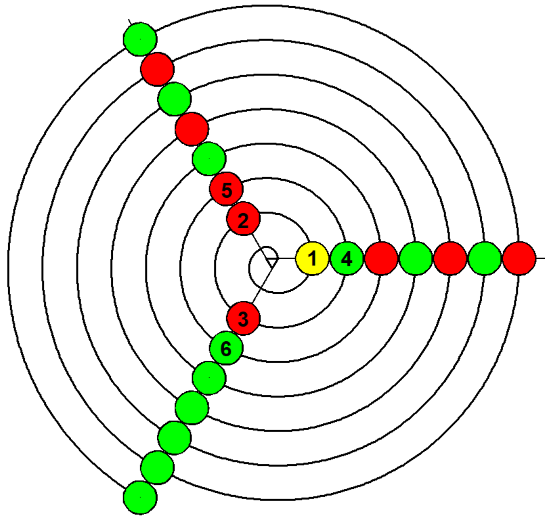
Bei der folgenden Darstellung mithilfe von *m*-strahligen Zahlenspiralen wird dieser Zeilenumbruch vermieden. Vielmehr bewegt man sich auf arithmetischen (archimedischen) Spiralen kontinuierlich von innen nach außen.

Primzahlen sind durch rot gefärbte Kreise hervorgehoben, die übrigen natürlichen Zahlen durch grün gefärbte Kreise, die Startzahl 1 ist gelb unterlegt.

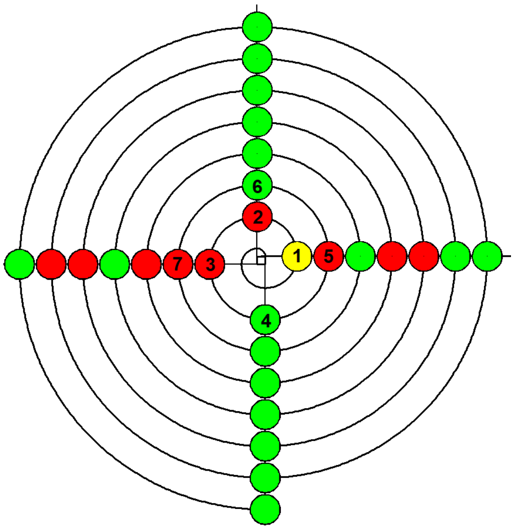
***m* = 2**



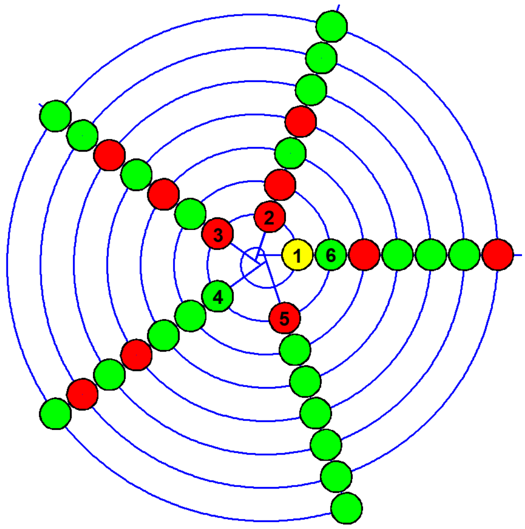
***m* = 3**



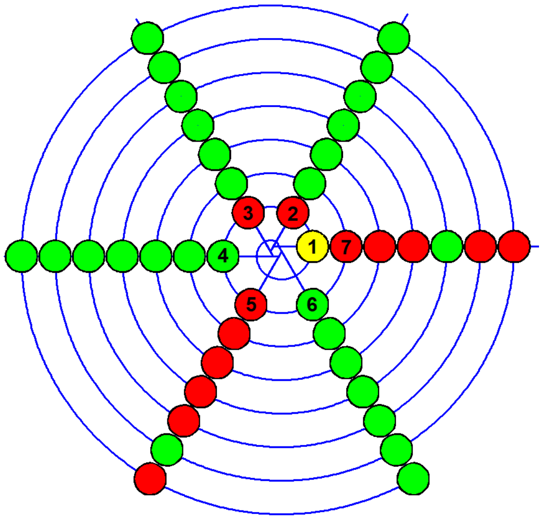
***m* = 4**



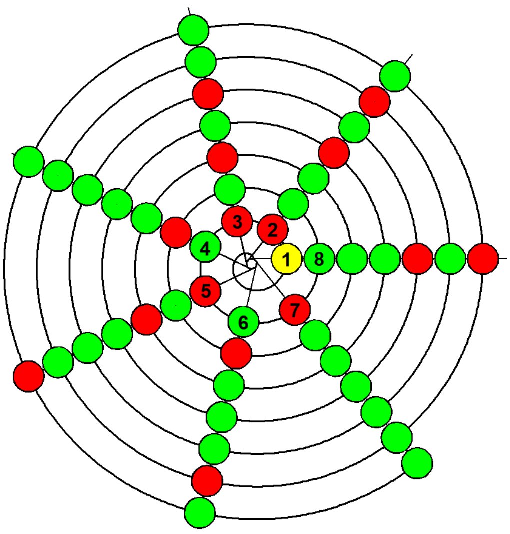
***m* = 5**



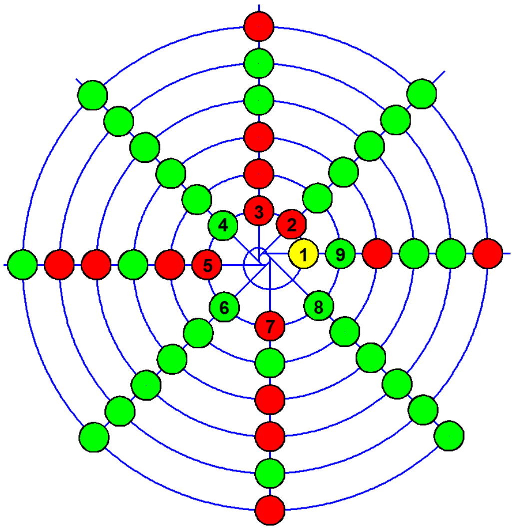
***m* = 6**



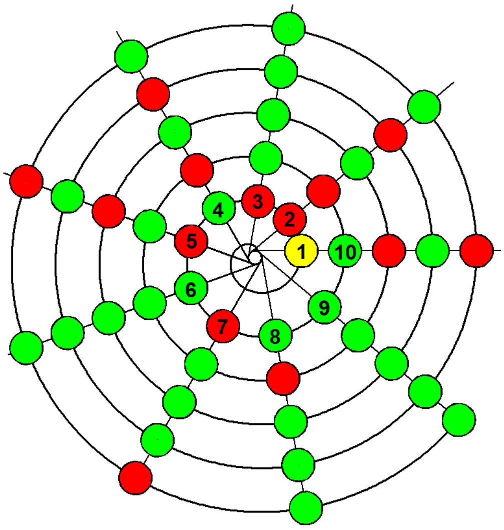
***m* = 7**



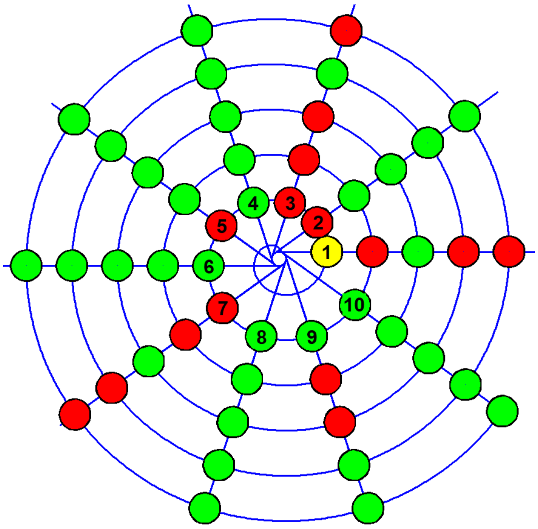
***m* = 8**



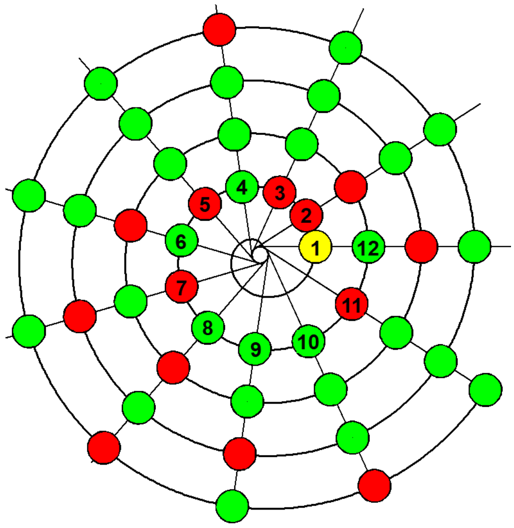
***m* = 9**



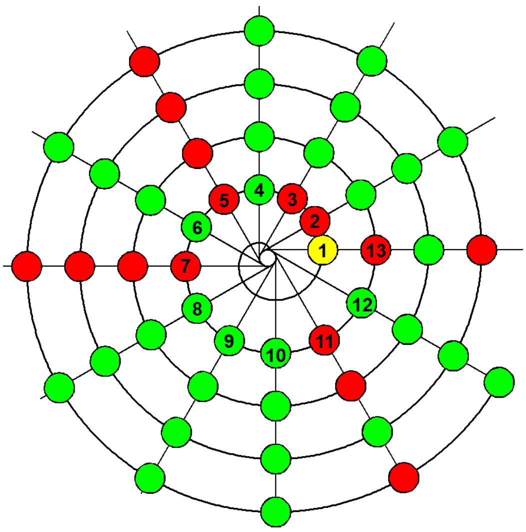
***m* = 10**



***m* = 11**



***m* = 12**



Literaturhinweis

Strick, Heinz Klaus (2019): *Mathematik ist wunderwunderschön*, Springer, Heidelberg

